MATHÉMATIQUES

DeltA

MANUEL

M. Genard
G. Leenaers

Plantyn

3e

Présentation du manuel

Tout d'abord, bienvenue en 3G et félicitations !

Si tu tiens ce livre entre tes mains, c'est que tu as réussi ton CE1D !
Tu as donc acquis toute une série d'outils que nous allons utiliser dans différents chapitres.
En effet, les mathématiques sont comme une maison que tu construis. En primaire et au premier degré, tu as fabriqué les briques et le ciment.
Tu n'en as pas toujours vu l'utilité… Que faire avec une brique seule ? Que représente pour toi un simple sac de ciment ?
À présent, nous allons construire la maison, grâce aux briques et au ciment, et nous allons ajouter les fenêtres, le toit, l'électricité, le chauffage…

Pour rendre ces différents apprentissages plus clairs pour toi, nous avons divisé chacun des chapitres en 11 parties. Voici l'explication de chacune d'elles :

1. Parcours d'apprentissage

Dans celui-ci, nous avons voulu te situer dans ton apprentissage.
D'un côté, tu verras les notions à partir desquelles nous allons travailler, et que tu as déjà développées au premier degré.
Ensuite seront exposées toutes les compétences visées par le chapitre… ce qu'il te faudra savoir en fin de chapitre, les prescrits légaux et communs à tous… ce sur quoi ton professeur pourra t'interroger.
Et pour finir, tu verras à quoi ces nouveaux acquis te seront utiles dans le futur… proche ou lointain.

2. Tâche de compétence cible

Nous avons ensuite voulu commencer par une tâche que tu devras être capable de résoudre à la fin du chapitre. Pour que tu saches ce que tu arriveras à faire quand tu auras découvert toutes les notions que recouvre chacun des chapitres. Pas de panique si tu n'arrives pas à la réaliser au début du chapitre !

3. Prérequis

Ici, tu trouveras quelques exercices que tu as déjà vus au premier degré, mais qui sont nécessaires pour aborder sereinement la matière de 3e. En les effectuant, tu te rendras compte de tes difficultés éventuelles, et des lacunes que tu devras éventuellement combler pour ne pas rencontrer de problèmes dans ton apprentissage de 3e. Tu pourras ainsi refaire des exercices de tel ou tel type pour aborder plus à l'aise les nouveaux chapitres.

4. Les exercices

Ceux-ci sont divisés en modules, qui ont des liens les uns avec les autres.
Dans chaque module, tu trouveras trois parties.

Activités de questionnement

Des exercices qui, comme le nom l'indique, te questionneront, et te permettront de découvrir de nouvelles notions.

Faisons le point

« J'entends et j'oublie, je vois et je me souviens, je fais et je comprends », Confucius, 551 av. J.-C. Ici, nous te poserons des questions pour t'aider à formaliser les notions que tu auras découvertes. Nous n'allons pas y mettre la théorie complétée… En effet, il nous a semblé indispensable de te pousser à l'autonomie en te faisant réfléchir sur la théorie découverte et en essayant de la formaliser toi-même.
Tu éprouveras peut-être quelques difficultés à te familiariser à la « fabrication » de résumés, mais nous espérons que, petit à petit, tu parviendras à faire toi-même les résumés du cours de 3e.

Pas d'inquiétude, nous avons également placé toute la théorie en fin de manuel…

Exercices d'application

Après avoir découvert et formalisé la théorie, il est évidemment logique de faire quelques exercices…

5. Carte du chapitre

Nous avons voulu utiliser une technique un peu différente pour t'aider à faire des résumés. Tu auras vu la théorie propre à chaque module séparément. Il est ensuite nécessaire d'avoir une vue d'ensemble de tout le chapitre avant d'aborder des exercices un peu plus complexes. Cette manière de faire te permet d'avoir cette vue.
Tu devras essayer de compléter cette carte, et petit à petit, être capable de la réaliser toi-même.

6. Ai-je bien compris ?

Après avoir fait le mind mapping, et donc avoir eu une vue d'ensemble de toute la théorie du chapitre, nous te poserons quelques questions pour vérifier tes connaissances… Cela te permettra de te situer et de savoir si tu as bien acquis les notions théoriques du chapitre.

7. Utilisons tes ressources pour travailler des compétences

Et maintenant que tu as découvert, formalisé et utilisé les nouvelles notions de chaque module, et que tu as assimilé la théorie globale du chapitre, il est temps de voir si tu peux utiliser correctement toute cette théorie dans les exercices…

Certains qualifient les exercices suivants de « tâches complexes ». Tu dois savoir qu'« une tâche est complexe si elle combine des éléments que l'élève connaît, maîtrise et a déjà utilisé plusieurs fois mais de façon séparée, dans un autre ordre ou dans un autre contexte ».[1]

En effet, les exercices que tu as réalisés jusqu'à présent ne faisaient appel qu'à une compétence pour la plupart d'entre eux tandis que, maintenant, diverses compétences seront sollicitées.

De plus en plus, dans ce livre, nous allons tenter d'ouvrir plusieurs tiroirs, nous travaillerons en spirale, c'est-à-dire que nous ferons, autant que faire se peut, appel aux chapitres précédents à tout moment. En effet, quel est l'intérêt de comprendre et de savoir appliquer les outils que nous t'avons donnés si tu ne sais pas QUAND tu dois les utiliser ?!

Ne te dis pas que ça va être compliqué, ces tâches ne sont complexes que parce qu'elles font intervenir plusieurs notions… mais elles ne sont pas compliquées, et tu es tout à fait capable de les réaliser. Pense à chaque fois à te situer dans la matière. De quels outils as-tu besoin pour résoudre tel ou tel problème ? Quand tu as trouvé l'outil, prends le temps de te souvenir de la théorie et ensuite résous l'exercice.

Après avoir réalisé ces exercices de compétences, tu seras capable de résoudre la tâche de compétence cible ! Reviens au début du chapitre et rends-toi compte que cet énoncé qui te paraissait très compliqué ne l'est pas tant que cela !

8. Maths sans frontières

Sache que tu n'es pas le seul à étudier les mathématiques… Dans cette rubrique, nous avons voulu te montrer des exemples de concours de mathématiques. Tu y trouveras 5 exercices par chapitre, de 4 sources différentes :

- Olympiades mathématiques belges : concours bien connu, organisé par la Société belge des Professeurs de Mathématiques d'expression française (SBPMef).
- Maths sans frontières : compétition interclasses de 3^{e} et de 2^{e}, organisée avec le concours de l'inspection pédagogique régionale et l'IREM de Strasbourg, France.
- Championnat international des jeux mathématiques et logiques : organisé par la fédération française des jeux mathématiques.
- Diplôme national du brevet des collèges : France.

9. La petite gazette

Pas de longs discours mathématiques, juste des anecdotes, des utilisations, un peu d'histoire, de quoi rendre les mathématiques plus concrètes.

10. Je prépare mon évaluation

Nous avons tenu à terminer chacun des chapitres par une évaluation formative. Une évaluation formative est une évaluation qui a pour intérêt de situer ton apprentissage, tes découvertes, tes lacunes. Les points ne sont là que pour te permettre de savoir où tu en es, te dire que tu dois encore revoir tel ou tel point pour réussir la « vraie » interrogation (qui s'appelle alors une évaluation sommative ou certificative).

11. Exercices complémentaires

Ici se trouvent des exercices en plus, à faire ou pas, suivant ton niveau, tes difficultés, ton envie… et l'envie de ton enseignant ;-)

REMARQUE IMPORTANTE

Une distance n'est pas une longueur. Une distance est un nombre réel positif. Nous ne pouvons donc normalement pas écrire : $|BC| = 5$ cm.

La notation exacte serait :
U.L. = 1 cm (Unité de longueur) ; $|BC| = 5$.
Ou
Lg [BC] = 5 cm

Cependant, comme ces notations alourdissent l'énoncé, nous avons choisi de prendre l'écriture $|BC| = 5$ cm.

1 http://ww2.ac-poitiers.fr/apprend/spip.php?article69, consulté le 15/12/11.

Les isométries

1. PARCOURS D'APPRENTISSAGE

Ensuite, je poursuivrai en…

Ce chapitre permet, d'une part, d'acquérir les procédés de démonstrations que tu utiliseras beaucoup en mathématiques et, d'autre part, il te permettra de travailler sur les fonctions. En effet, tu verras le lien entre les fonctions et les isométries dans les classes suivantes…

Maintenant, je vais apprendre à…

Les objectifs de ce chapitre sont les suivants :

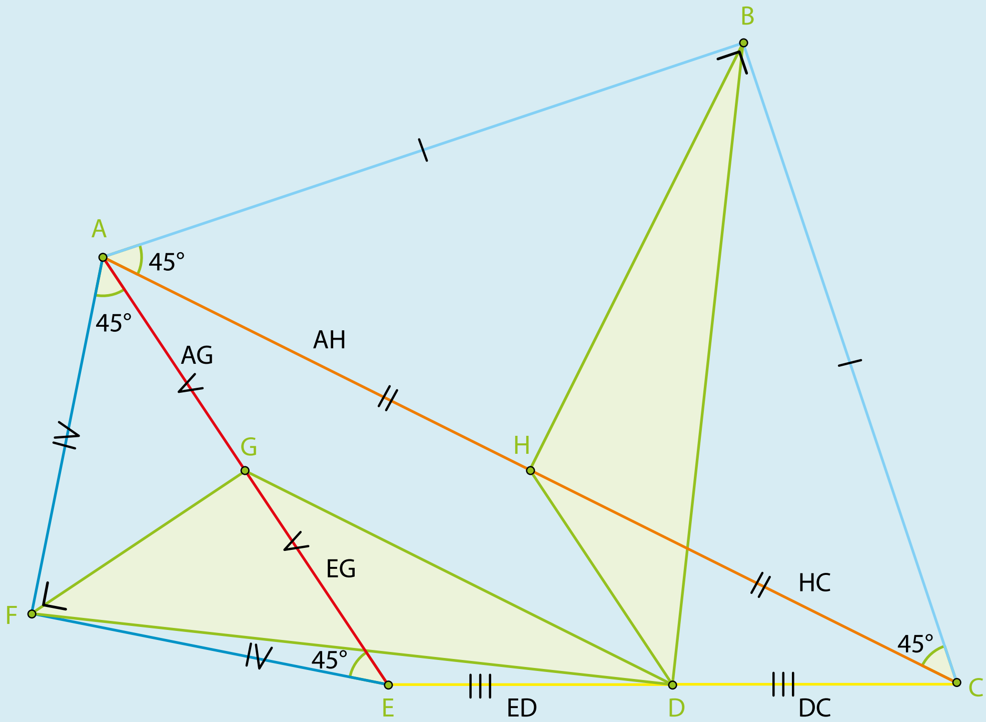
- Exprimer les données minimales qui permettent de reproduire une figure donnée.
- Reconnaître des figures isométriques et identifier une (ou des) isométrie(s) qui les applique(nt) l'une sur l'autre.
- Reconnaître des triangles isométriques dans une configuration et justifier la démarche à l'aide du cas d'isométrie adéquat.
- Justifier les étapes d'une construction.
- Transposer une démonstration faite en classe à propos d'un énoncé analogue.
- Construire une figure isométrique à une autre en utilisant les instruments adéquats.
- Prouver une égalité de longueurs ou d'angles en utilisant les cas d'isométrie des triangles et des propriétés déjà établies (angles, triangles particuliers, médiane, médiatrice, bissectrice, quadrilatères particuliers).

Je mobilise ce que je sais dejà

Au premier degré, en géométrie, tu as appris à rechercher et à construire des figures superposables. Grâce aux isométries, tu as pu reconnaître et décrire des mouvements qui appliquent une figure géométrique sur une autre. Les constructions de figures t'ont permis de sélectionner les données nécessaires et suffisantes pour construire telle figure géométrique ou telle autre. Enfin, les propriétés des angles ont constitué une des premières initiations à la mise en forme de démonstrations.

2. TÂCHE DE COMPÉTENCE CIBLE

Jamel, géomètre, est envoyé en mission par sa société afin de déterminer si deux terrains sont parfaitement identiques. Il possède la représentation suivante, obtenue à l'aide de photos aériennes :

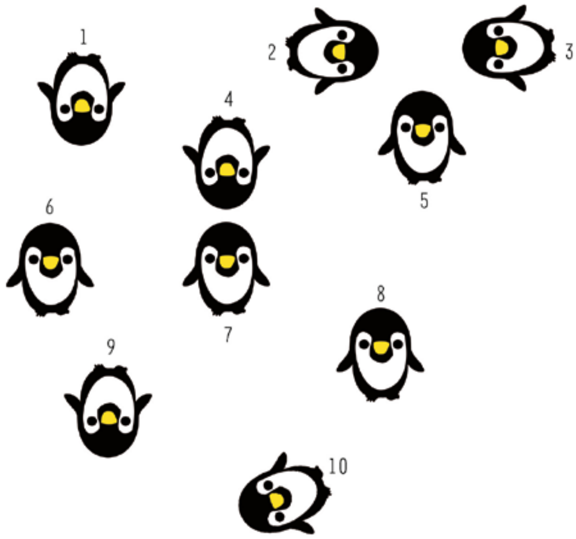


Arrivé sur les lieux, Jamel se rend compte que ses appareils de mesure ont été déplacés dans une autre camionnette. Uniquement à l'aide de ses connaissances géométriques, comment peut-il affirmer si « oui » ou « non » les deux terrains (DHB) et (FGD) sont identiques ?

3. PRÉREQUIS

1. **Toutes les propositions qui suivent sont fausses. Pour chacune d'elles, trouve un contre-exemple.**
   1. Un triangle isocèle possède deux axes de symétrie.
   2. Un parallélogramme possède un centre de symétrie et deux axes de symétrie.
   3. Une figure qui possède un centre de symétrie possède au plus deux axes de symétrie.

2. Détermine l'isométrie qui applique la figure n° … sur la figure n° …



3. Détermine le nom de la (les) transformation(s) non identique(s) évoquée(s) par chacune des propositions.

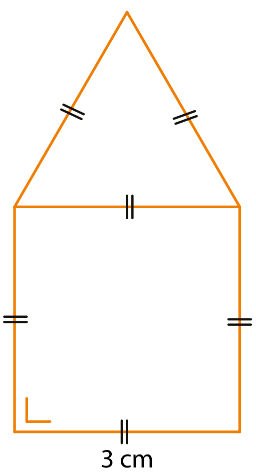
	s_A	s_m	$t_{\overrightarrow{AB}}$	$r_{0,\alpha}$
1. *Je ne conserve pas la direction d'une droite.*				
2. *Je ne possède aucun point fixe.*				
3. *Je fais subir un déplacement aux figures.*				
4. *Je ne suis caractérisée que par un point appelé centre.*				
5. *Je fais tourner les objets autour d'un point.*				
6. *Je conserve les distances.*				
7. *Je retourne les figures.*				
8. *Je modifie l'amplitude des angles.*				
9. *Je possède plusieurs points fixes.*				
10. *Je conserve la direction et le sens.*				

4. Constructions

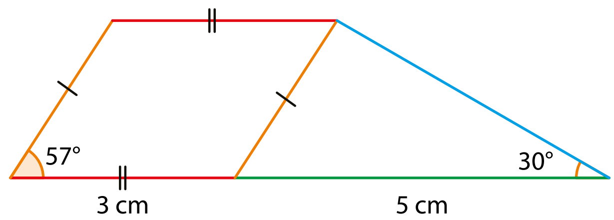
1. Suis les consignes…

   – Place un point A au centre d'une feuille.
   – Trace une droite horizontale a passant par A.
   – Trace un cercle $\mathcal{C}$ de centre A et de rayon 2 cm.
   – Nomme B et C les intersections du cercle $\mathcal{C}$ avec la droite a. (B à gauche)
   – Trace un cercle $\mathcal{C}'$ de centre A et de rayon 5 cm.
   – Nomme X et Y les intersections du cercle $\mathcal{C}'$ avec la droite a. (X à gauche)
   – Trace E, l'image de X par la rotation de centre A et d'amplitude –70°.
   – Trace F, l'image de Y par la rotation de centre A et d'amplitude +70°.
   – Trace d, perpendiculaire à a et passant par E.
   – Trace e, perpendiculaire à a et passant par F.
   – Trace H, image de F par la rotation de centre E et d'amplitude 90°.
   – Par H, trace h perpendiculaire à d.
   – Place I, intersection entre h et e.
   – M, milieu de [EH] et N, milieu de [FI].
   – Trace un demi-cercle de centre M et de rayon |HM| à gauche de d.
   – Trace un demi-cercle de centre N et de rayon |HM| à droite de e.
   – Prends un feutre noir et repasse sur : le rectangle EFIH, les deux demi-cercles de centres M et N, l'arc de cercle entre X et Y situé au-dessus de a et l'arc de cercle entre B et C situé au-dessus de a ; les segments [BX] et [CY].
   – Complète avec la trompe et la queue de l'éléphant…

2. Fais en sorte de donner des indications à ton voisin afin qu'il représente EXACTEMENT sur sa feuille les deux dessins qui suivent.



①

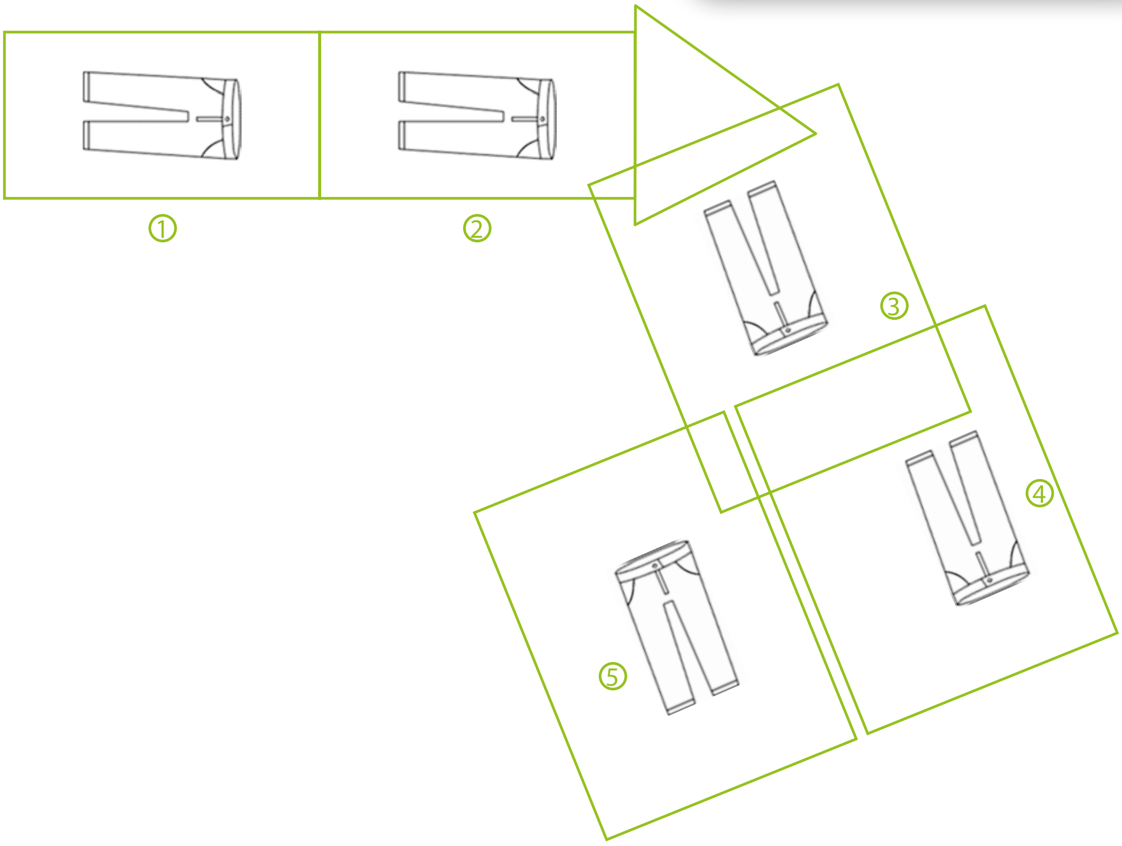


②

ACTIVITÉS DE QUESTIONNEMENT

1. Les jeans

Marie travaille dans une entreprise de confection de jeans. Avant d'être empaqueté, chaque jeans passe sur une machine constituée de tapis roulants.



Pour chaque passage d'un tapis *n* au tapis *n + 1*, donne la transformation qui convient :

❶ vers ❷	Symétrie orthogonale	Translation	Rotation de +90°
❷ vers ❸	Rotation de +120°	Rotation de +60°	Rotation de –60°
❸ vers ❹	Translation	Symétrie orthogonale	Symétrie centrale
❹ vers ❺	Translation	Symétrie orthogonale	Symétrie centrale

Pour passer de 1 à 5, nous dirons que nous avons appliqué une composée d'isométries. Selon toi, que signifie le mot « composée » ?

Donne plusieurs manières de passer de 1 à 4.

2. Qui posera le moins de questions ?

Ton professeur a réalisé et découpé un triangle. Essaie de représenter exactement le même triangle que lui sur ta feuille, en lui posant un minimum de questions. Cherche plusieurs solutions.

FAISONS LE POINT

243-244 Théorie | 246 Théorie

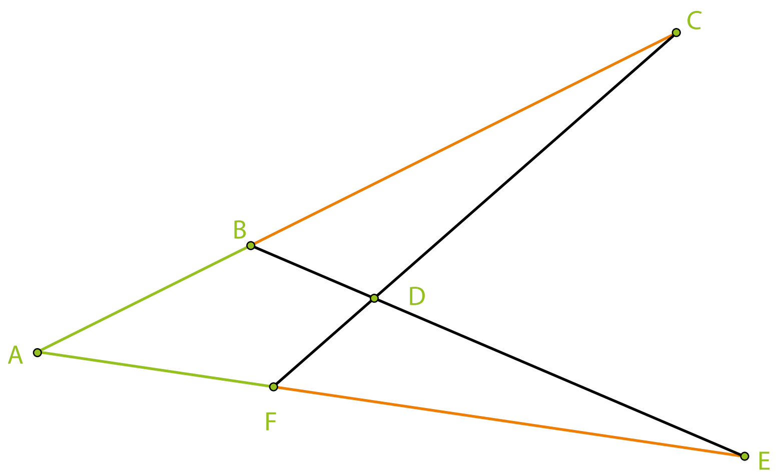
- Qu'est-ce qu'une isométrie ? Essaie de réaliser un tableau avec les isométries vues au premier degré et les éléments dont tu te souviens. (Éléments caractéristiques, mouvements, définitions, verbe, exemple)
- Quels sont les trois critères d'isométrie des triangles ?

EXERCICES D'APPLICATION

1. Trace le triangle ABC. Explique tes constructions.

1. $|\widehat{A}| = 60°$, $|\widehat{B}| = 90°$ et $|AB| = 6$ cm.
2. $|\widehat{A}| = 40°$, $|\widehat{B}| = 60°$ et $|BC| = 5$ cm.
3. $|\widehat{A}| = 30°$, $|AB| = 7$cm et $|BC| = 5$ cm.

2. Soit la figure suivante avec $|AB| = |AF|$; $|BC| = |EF|$.



1. Trace une figure isométrique à celle-ci.
2. Démontre que $|BE| = |CF|$.
3. Démontre que $|BD| = |DF|$.
4. Cite une composée d'isométrie qui applique le triangle ACF sur le triangle ABE.

3. Soit un segment horizontal [AB]. Soit C et D, deux points distincts appartenant à la médiatrice de [AB]. Démontre que les triangles CAD et CBD sont isométriques.

4. Considérons un triangle quelconque ABC. Soit E, F et G, les milieux respectifs des côtés [AB], [BC] et [AC]. Démontre que les triangles BFE, GEF, FCG et EAG sont isométriques.

5. Soit ABC et A'B'C', deux triangles isométriques. Soit G et G', les centres de gravité des triangles ABC et A'B'C'. Démontre que $|\widehat{AGB}| = |\widehat{A'G'B'}|$

6. Soit ABC, un triangle isocèle ($|AB| = |AC|$). Soit M, un point de [BC]. Par M, on mène la perpendiculaire à AB, qui coupe AB en P, et la perpendiculaire à AC, qui coupe AC en Q. Par C, on mène la perpendiculaire à MP, qui coupe MP en R. Démontre que les triangles MQC et MRC sont isométriques.

7. Considérons un carré ABCD. Traçons le cercle de centre O et de diamètre [AB] et la tangente à celui-ci passant par D et ne passant pas par A. Le point de tangence est noté M.

1. Représente géométriquement les données fournies dans l'énoncé.
2. Démontre que les triangles OAD et OMD sont isométriques.
3. Trace la droite comprenant O et M. Cette droite coupe BC en Q. Démontre que les triangles DMQ et DCQ sont isométriques.

8. Démontre que, dans un triangle isocèle, les hauteurs relatives aux côtés de même longueur ont même longueur.

9. Dans un triangle rectangle, les critères d'isométrie peuvent être simplifiés. Il suffit de remplir deux conditions. Lesquelles ? Démontre.

10. Les quadrilatères peuvent être classés suivant leurs diagonales.

- Se coupent-elles en leur milieu ?
- Sont-elles perpendiculaires entre elles ?
- Sont-elles de même longueur ?

Ainsi,
<u>Si</u> les diagonales d'un quadrilatère convexe se coupent en leur milieu,
<u>Alors</u> ce quadrilatère est un parallélogramme.

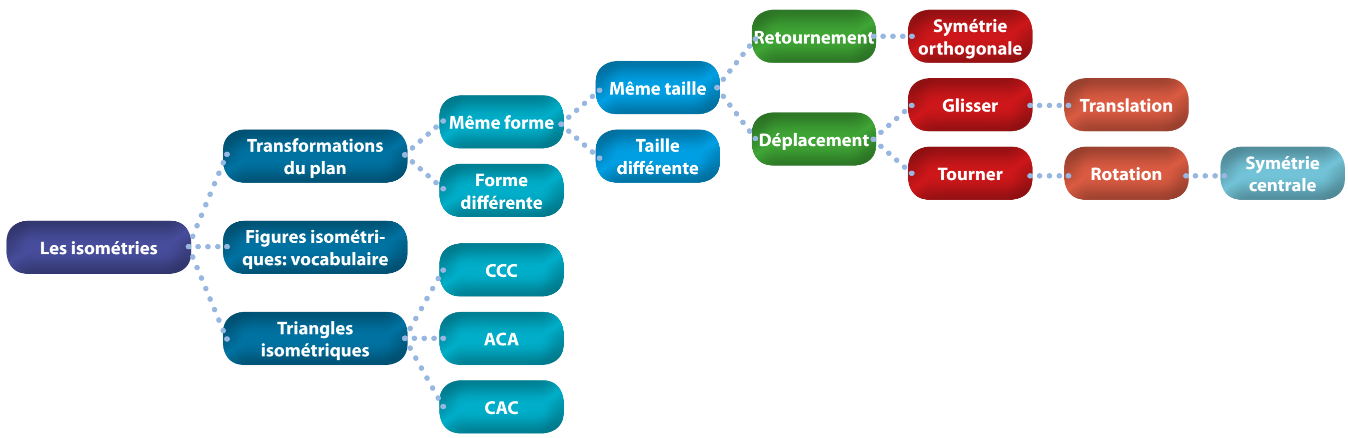
ou
<u>Si</u> les diagonales d'un quadrilatère convexe se coupent perpendiculairement en leur milieu,
<u>Alors</u> ce quadrilatère est un losange.

Ou dans l'autre sens,
<u>Si</u> un quadrilatère convexe est un rectangle,
<u>Alors</u> ses diagonales ont la même longueur.

À toi, trouve quelques autres propriétés (minimum 3).

Ces propriétés peuvent être démontrées grâce aux triangles isométriques.
Démontre les trois propriétés données et celles que tu as établies.

5. CARTE DU CHAPITRE



6. AI-JE BIEN COMPRIS ?

1. **Vrai ou faux ? Justifie !**
   1. **Deux triangles qui ont un angle de même amplitude et deux côtés de même longueur sont isométriques.**
   2. **Deux retournements peuvent produire le même résultat qu'un déplacement.**
   3. **La symétrie centrale est une rotation et la rotation est une symétrie centrale.**
   4. **Des triangles semblables peuvent être isométriques.**
   5. **Des triangles isométriques sont des triangles semblables.**
   6. **Deux triangles qui ont trois angles de même amplitude sont isométriques.**
2. **Quels sont les trois cas d'isométrie des triangles ?**

7. Utilisons tes ressources pour travailler des compétences

1. Cercles

Considérons un cercle $\mathcal{C}_1$ de centre O, K un point extérieur à ce cercle et un cercle $\mathcal{C}_2$ de centre O passant par K. OK coupe $\mathcal{C}_1$ en Q et Q'. La perpendiculaire à OK passant par Q coupe $\mathcal{C}_2$ en P et P'. La droite OP coupe $\mathcal{C}_1$ en V et V' et la droite OP' coupe $\mathcal{C}_1$ en W et W'.*

– Représente géométriquement les informations fournies dans l'énoncé.
– Démontre que les triangles PQO et KVO sont isométriques.
– Démontre que KV est tangente à $\mathcal{C}_1$.
– Démontre que les droites QV et KP sont parallèles.

2. Repère cartésien

Dans un repère cartésien orthonormé, on donne les triangles NXS et TAR dont les coordonnées des sommets sont N(–4,3) ; X(–1,2) ; S(–2,1) et T(2,2) ; A(3,1) ; R(1,–1).

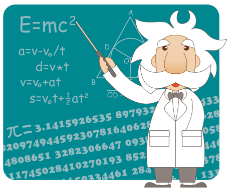
Les amplitudes des angles $\widehat{TAR}$ et $\widehat{XSN}$ sont-elles égales ? Justifie ta réponse.

3. Construction

Construis, au compas et à la règle non graduée, un carré inscrit dans le cercle de centre O. Explique les étapes de la construction et justifie-les en énonçant les définitions ou les propriétés adéquates.

Tu es à présent capable de résoudre la tâche cible !

102 Tâche



* Q est près de K   V est près de P   W est près de P'

8. MATHÉMATIQUES SANS FRONTIÈRES

1. 37es Olympiades de mathématiques Midi, Éliminatoires 2012

Laquelle des figures suivantes n'a jamais exactement deux axes de symétrie ?

a	Un losange
b	Un rectangle
c	Un segment de droite
d	Un triangle
e	Un cercle muni d'un diamètre

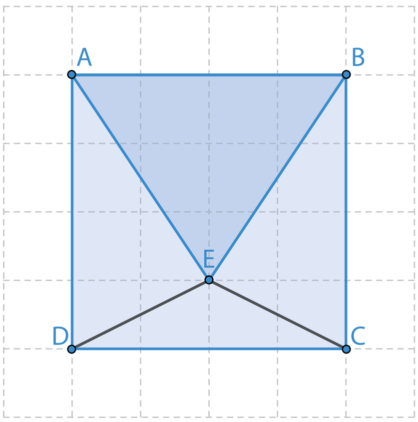
2. 37es Olympiades de mathématiques Midi, Éliminatoires 2012

Les deux triangles non isocèles ABC et DEF sont isométriques, les sommets se correspondant dans cet ordre. Les points B, C, F et E sont alignés dans cet ordre sur une droite d. Les sommets A et D sont de part et d'autre de d. Quelle isométrie applique le premier triangle sur le second ?

a	Une symétrie axiale composée avec une translation
b	Une translation parallèle à d
c	Une symétrie d'axe d
d	Une rotation d'angle différent de 180°
e	Une symétrie centrale dont le centre est sur d

3. 37es Olympiades de mathématiques Midi, Éliminatoires 2012

Le quadrilatère ABCD est un carré et le triangle ABE est équilatéral. Détermine l'amplitude de $\widehat{CDE}$.



a	b	c	d	e
12°	14°	15°	16°	17°

4. 37es Olympiades de mathématiques Midi, demi-finale 2012

Un cercle de centre C et un cercle de centre D se coupent en deux points distincts M et P.
Parmi les affirmations suivantes, combien sont toujours vraies ?

a	CD est médiatrice de [MP].
b	MP est médiatrice de [CD].
c	$\vert CM \vert = \vert MD \vert$
d	$\vert CM \vert = \vert CP \vert$
e	CMDP est un losange.

5. 37es Olympiades de mathématiques Midi, demi-finale 2012

Si ABCD est un carré, l'application successive des symétries centrales par rapport aux points A, B, C, D équivaut à :

a	La symétrie centrale par rapport au centre du carré.
b	La translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.
c	La translation de vecteur $\overrightarrow{DA}$.
d	La translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$.
e	La transformation identique.

La petite gazette

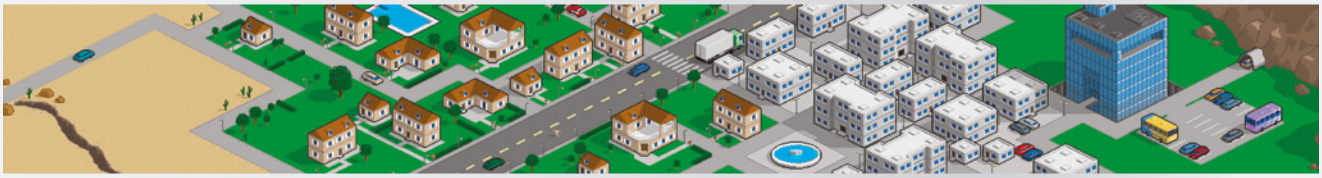
L'utilisation des perspectives permet de mieux comprendre la structure générale d'un objet ou d'un ensemble d'objets issus de l'espace tridimensionnel. Dans les domaines techniques, artistiques, architecturaux…, les perspectives sont des compléments incontournables. En géométrie, il existe plusieurs perspectives. Dans le cadre qui nous concerne, nous nous limiterons à la perspective isométrique.

Une vue isométrique est une vue en perspective dans laquelle les trois dimensions sont représentées avec la même importance. Très utilisée en pixel-art et dans les jeux vidéo, cette perspective reste parfaitement adaptée tant que la profondeur est faible.

Dans les jeux vidéo, la perspective isométrique est également employée afin de proposer aux joueurs un environnement qui respecte au mieux les réalités du monde dans lequel s'inscrit le jeu.

legende : Plus reconnait, le jeu Bastion

Exemples :



legende : Ultima Online, un des ancêtres des MMORPG (massively multiplayer online role playing game).

JE PRÉPARE MON ÉVALUATION

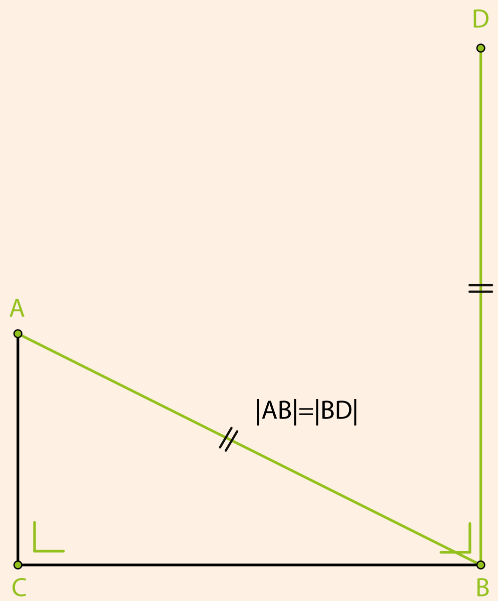
1. **Soit ABCD, un parallélogramme dont les diagonales se coupent en E. Trace une droite (distincte des diagonales) qui passe par E et qui coupe AD en F et BC en G.**

Démontre que | EF | = | EG |.

2. **Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon 3. Soit [AB] et [CD], deux diamètres de ce cercle.**

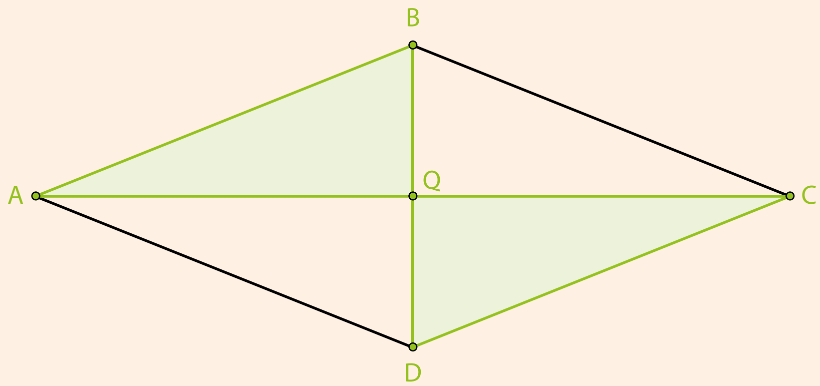
Démontre que les triangles OAD et OBC sont isométriques.

3. **Soit la figure suivante, telle que |AB| = |BD| :**



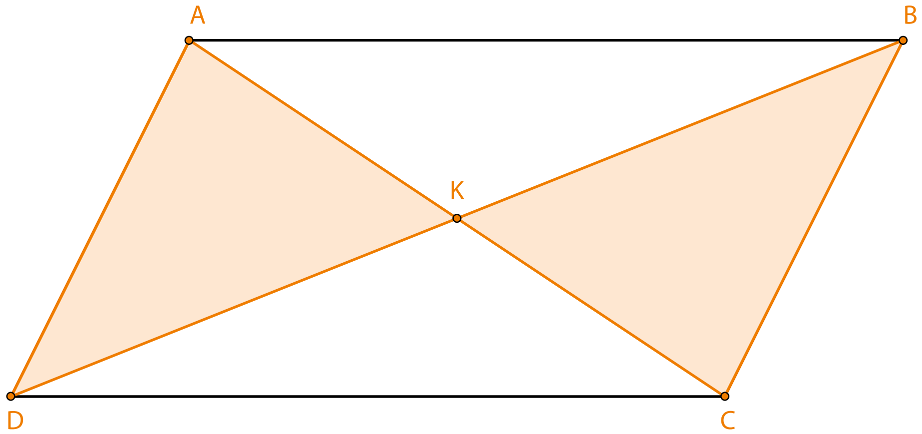
- Reproduis cette figure sur ta feuille avec |AC| = 3 cm ;|BC| = 4 cm ; |AB| = |BD| = 5 cm ; $|\widehat{B}| = |\widehat{C}| = 90°$
- Construis le rectangle DBCE.
- Construis la bissectrice de $\widehat{DBA}$ qui coupe CE en F.
- Démontre que les triangles BAF et BDF sont isométriques.

4. **Le point Q est le point d'intersection des diagonales du losange ABCD ci-dessous :**
Démontre que les triangles AQB et CQD sont isométriques. Ensuite, propose une transformation du plan et une composée de transformations du plan qui applique le triangle AQB sur le triangle CQD.



EXERCICES COMPLÉMENTAIRES

1. Dans le parallélogramme ABCD ci-dessous, les diagonales se coupent en un point K.



Démontre que les triangles AKD et CKB sont isométriques. Ensuite, propose une transformation du plan qui applique le triangle AKD sur le triangle CKB.

2. Trace le triangle ABC si :

1. $|\widehat{A}| = 35°$, $|\widehat{B}| = 132°$ et $|AB| = 6$ cm.
2. $|\widehat{A}| = 105°$, $|\widehat{B}| = 32°$ et $|BC| = 4{,}5$ cm.

Explique tes constructions.

3. Soit un triangle ABC isocèle ($|AB| = |AC|$). Portons respectivement sur les côtés [AB] et [AC] les points D et E équidistants du sommet A. Traçons [BE] et [CD] qui se coupent au point F. Démontre que le triangle BFC est isocèle.

4. Démontre que, dans un même cercle, les milieux de deux cordes de même longueur sont équidistantes du centre de ce cercle.

5. Soit un triangle ABC quelconque. Sur [AB], on construit un carré ABDE. Sur [AC], on construit un carré ACFG.

Soit K le milieu de [BC] et A' le symétrique de A par rapport à K.

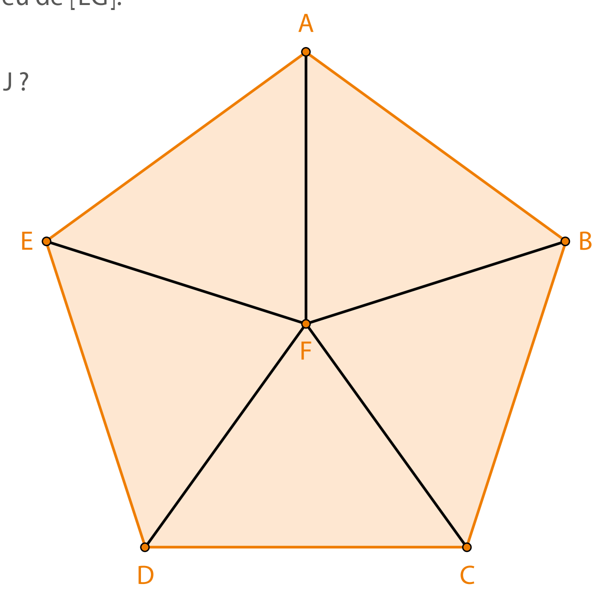
1. Représente géométriquement les informations fournies dans l'énoncé (conseil : choisis $|AB| = 4$ cm $|AC| = 6$ cm $|BC| = 5$ cm.)
2. Démontre que $|EC| = |BG|$.

Et pour les plus forts…

3. Démontre que les triangles EAG et ABA' sont isométriques.
4. Démontre que $|EG| = 2 \,.\, |AK|$.
5. Soit J le pied de la hauteur de ABC issue de A et Q le milieu de $[EG]$.
Démontre que $|\widehat{QAE}| + |\widehat{EAB}| + |\widehat{BAJ}| = 180°$.
Que peut-on en déduire relativement aux points Q, A et J ?

6. Le pentagone ABCDE ci-dessous est régulier. Le centre F du pentagone est relié à chacun des sommets, de façon à former cinq triangles isométriques.

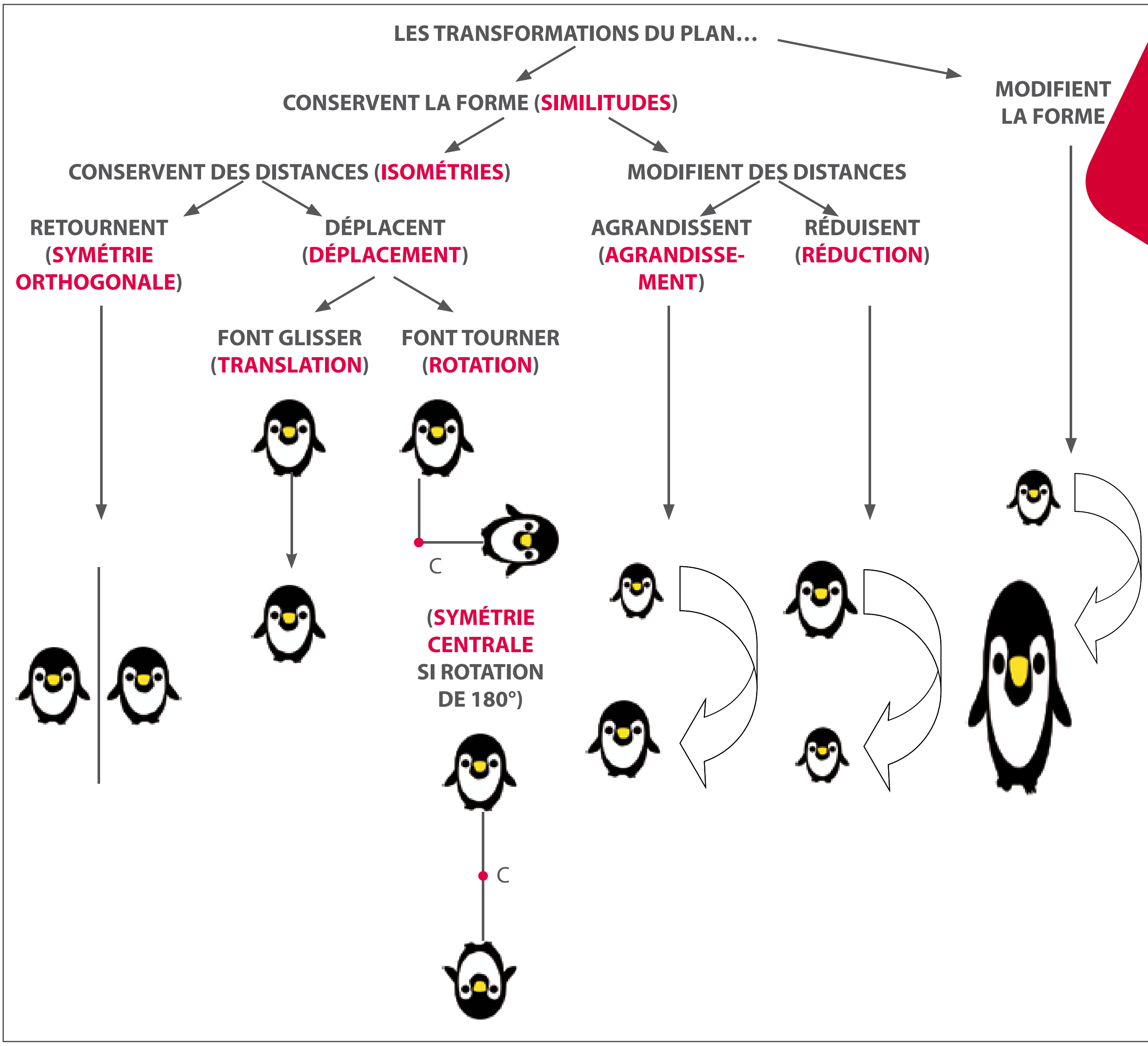
Propose une transformation du plan ou une composée de transformations du plan qui applique le triangle AFE sur le triangle BFC.



CHAPITRE 5

Les isométries

1. LES TRANSFORMATIONS DU PLAN : RAPPEL



	Translation	Symétrie orthogonale	Rotation	Symétrie centrale
Verbe de mouvement	Déplacer en glissant	Retourner	Déplacer en tournant	Déplacer en tournant de 180°
Élément caractéristique	Un couple de points (son vecteur)	Une droite (son axe)	Un point, une amplitude et un sens	Un point (son centre)
Point fixe	Aucun	Tous les points de l'axe	Le centre de la rotation	Le centre de la symétrie
Notation	$t_{\overrightarrow{AB}}$	S_a	$R_{O,\alpha}$	s_A
Lecture	La translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$	La symétrie orthogonale d'axe a	La rotation de centre O et d'amplitude α	La symétrie centrale de centre A

2. FIGURES ISOMÉTRIQUES

Les **isométries** sont des transformations du plan qui conservent les mesures.

Le mot « isométrique » vient du grec isos, qui signifie « égal », et metron, « mesure ».

Deux figures sont isométriques si elles sont superposables, c'est-à-dire si elles sont l'image l'une de l'autre par une isométrie.

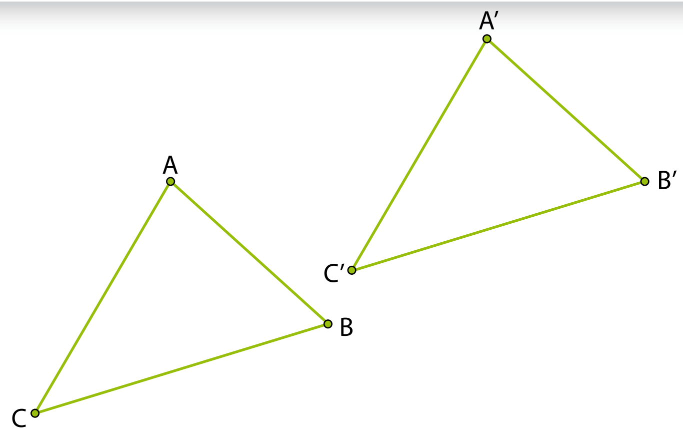


Figure 108

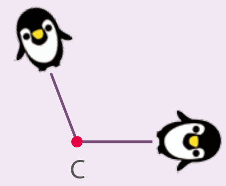
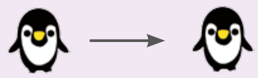
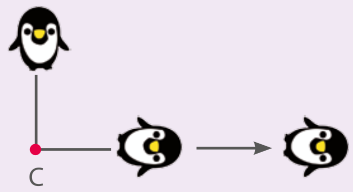
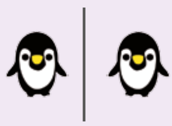
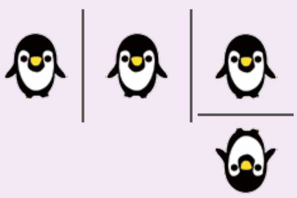
Pour noter que les triangles ABC et A'B'C' sont isométriques, on écrit ABC iso A'B'C'.

Des **côtés homologues** sont des segments qui se correspondent par une transformation du plan (ils sont superposables si cette transformation est une isométrie). [AB] et [A'B'] sont des côtés homologues.

Des **angles homologues** sont des angles qui se correspondent par une transformation du plan. $\hat{A}'$ et $\hat{A}$ sont des angles homologues.

Des **sommets homologues** sont des points qui se correspondent par une transformation du plan. A et A' sont des sommets homologues.

Deux figures isométriques ont leurs côtés homologues de même longueur et leurs angles homologues de même amplitude.

Les déplacements	
▶ les rotations (tourner autour d'un point) (donc les symétries centrales)	
▶ les translations (glisser)	
▶ les composées de déplacements	
▶ les composées de symétries axiales en nombre pair	
Les retournements	
▶ les symétries axiales	
▶ les composées de symétries axiales en nombre impair avec ou sans déplacement	

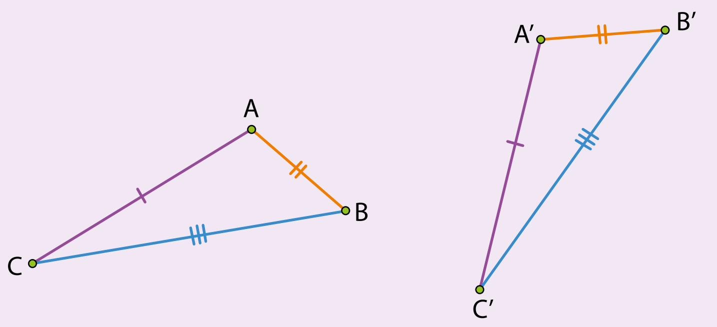
Les **invariants** communs à toutes les isométries :

- l'alignement des points
- la distance entre 2 points
- l'amplitude d'un angle
- le parallélisme
- le milieu d'un segment
- la perpendicularité

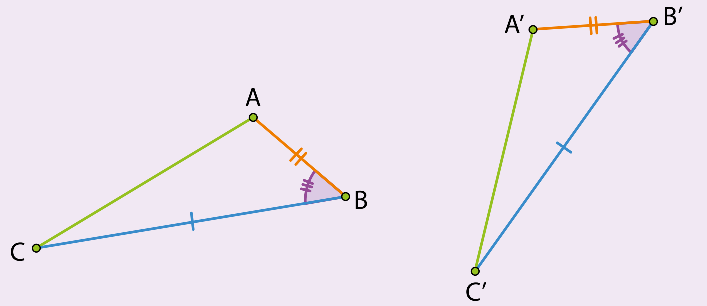
(*Cela signifie que l'image de 2 droites perpendiculaires sera 2 droites perpendiculaires*, etc.)

3. CAS D'ISOMÉTRIE DES TRIANGLES

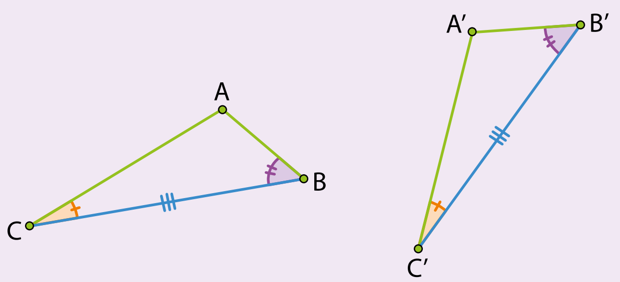
SI deux triangles ont leurs côtés homologues respectivement de même longueur, ALORS ces deux triangles sont isométriques.

Si	**C** $\lvert AB \rvert = \lvert A'B' \rvert$ **C** $\lvert AC \rvert = \lvert A'C' \rvert$ **C** $\lvert BC \rvert = \lvert B'C' \rvert$	Alors	ABC iso A'B'C'	 Figure 109

SI deux triangles ont un angle homologue de même amplitude compris entre deux côtés homologues respectivement de même longueur, ALORS ces deux triangles sont isométriques.

Si	**C** $\lvert AB \rvert = \lvert A'B' \rvert$ **A** $\lvert \hat{B} \rvert = \lvert \hat{B'} \rvert$ **C** $\lvert BC \rvert = \lvert B'C' \rvert$	Alors	ABC iso A'B'C'	 Figure 110

SI deux triangles ont un côté homologue de même longueur compris entre deux angles homologues respectivement de même amplitude, ALORS ces deux triangles sont isométriques.

Si	**A** $\lvert \hat{B} \rvert = \lvert \hat{B'} \rvert$ **C** $\lvert BC \rvert = \lvert B'C' \rvert$ **A** $\lvert \hat{C} \rvert = \lvert \hat{C'} \rvert$	Alors	ABC iso A'B'C'	 Figure 111

REMARQUE

Attention, de la prudence quant à la position des éléments homologues comme le montrent les exemples suivants :

Ex. 1 : les deux triangles ont un angle de même amplitude, ainsi que deux côtés respectivement de même longueur, mais ils ne sont pas isométriques.

→ **L'angle doit être compris entre les côtés respectivement de même longueur.**

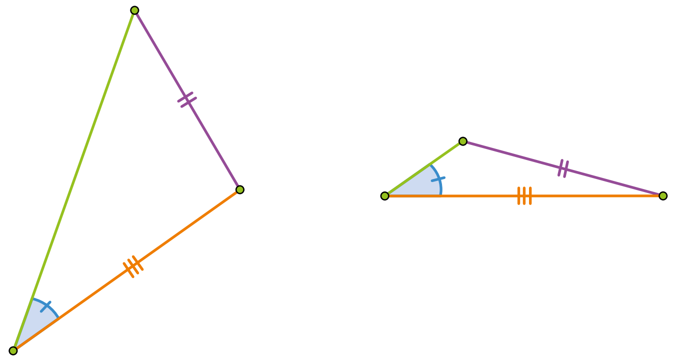


Figure 112

Ex. 2 : les deux triangles possèdent deux angles respectivement de même amplitude et un côté de même longueur, mais ils ne sont pas isométriques.

→ **Le côté doit être compris entre les angles respectivement de même amplitude.**

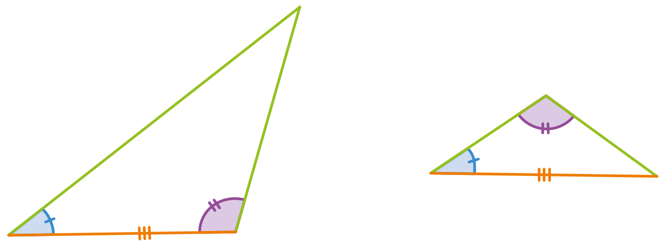


Figure 1

4. CAS D'ISOMÉTRIE DES TRIANGLES RECTANGLES

SI deux triangles rectangles ont leur hypoténuse de même longueur et un angle aigu de même amplitude, ALORS ils sont isométriques.

Si	ABC et A'B'C' sont des triangles rectangles en A avec $|\widehat{B}| = |\widehat{B'}|$ $|BC| = |B'C'|$	Alors	ABC iso A'B'C'

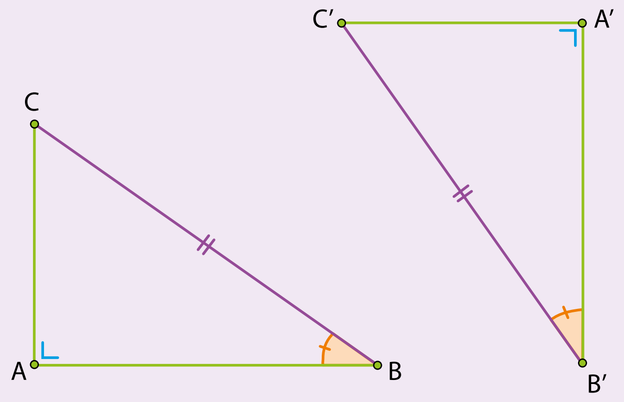


Figure 118

SI deux triangles rectangles ont l'hypoténuse et un côté de l'angle droit respectivement de même longueur, ALORS ils sont isométriques.

Si	ABC et A'B'C' sont des triangles rectangles en A avec $|AB| = |A'B'|$ $|BC| = |B'C'|$	Alors	ABC iso A'B'C'

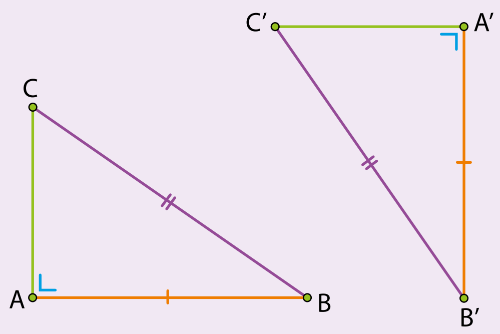


Figure 115

Les isométries