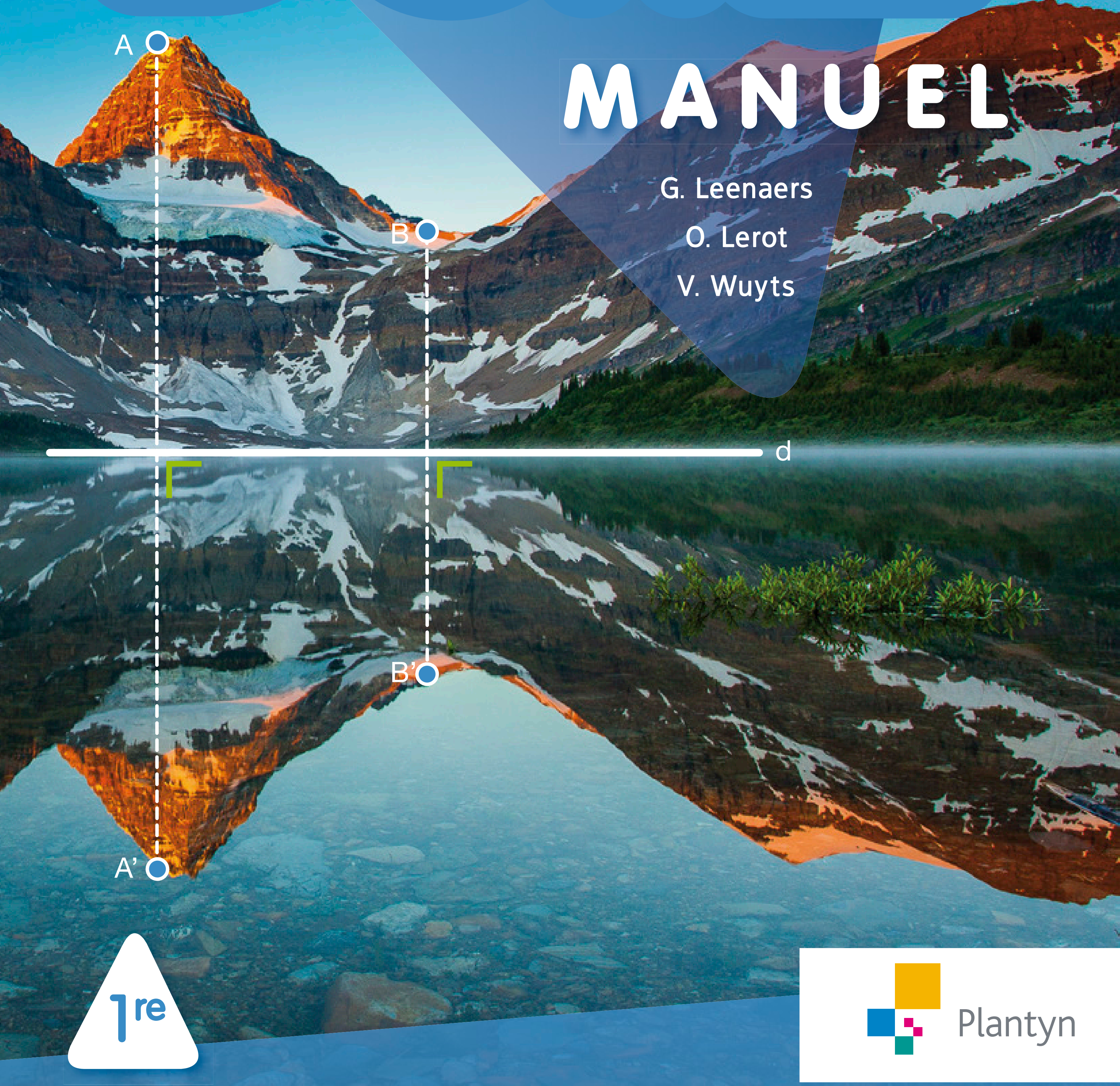
MATHÉMATIQUES

DeltA

MANUEL

G. Leenaers
O. Lerot
V. Wuyts



1re

Plantyn

Introduction à l'attention des élèves

Tout d'abord, bienvenue en 1re !
Si tu tiens ce livre entre tes mains, c'est que tu as réussi ton CEB. Félicitations !
Delta est une collection de mathématiques qui t'accompagnera durant toute l'année scolaire.
Tu as acquis lors des précédentes années toute une série d'outils que nous allons utiliser dans différents chapitres.
Pour rendre ces divers apprentissages plus clairs pour toi, nous avons divisé chacun des chapitres du manuel en plusieurs parties. Voici l'explication de chacune d'elles :

1. Tâche de compétence cible
Nous avons voulu commencer par une tâche que tu devras être capable de résoudre à la fin du chapitre. Tu sauras ainsi ce que tu arriveras à faire quand tu auras découvert toutes les notions que recouvre chacun des chapitres. Pas de panique donc si tu n'arrives pas à la réaliser au début du chapitre !

THÉORIE

2. Théorie
Tu as ensuite affaire à la théorie du chapitre correspondant. La théorie est divisée en différents modules (A., B., C., etc.) Tu y trouveras toutes les notions à maîtriser afin de pouvoir réaliser les exercices du cahier et résoudre la tâche de compétence cible.

3. Carte du chapitre
Nous avons voulu utiliser une technique un peu différente pour t'aider à faire des résumés. Tu auras vu la théorie propre à chaque module séparément, et il sera ensuite nécessaire d'avoir une vue d'ensemble de tout le chapitre avant d'aborder des exercices un peu plus complexes. Cette carte te permet d'avoir cette vue d'ensemble.
Tu devras essayer de compléter cette carte dans ton cahier, et petit à petit, être capable de la réaliser par toi-même. Idéalement, tu devras connaître les différentes « routes » de la carte.

4. Ai-je bien compris ?
Quelques questions permettant de voir si tu as compris les notions théoriques du chapitre.

5. La petite gazette
Pas de longs discours mathématiques, juste des anecdotes, des utilisations, un peu d'histoire, de quoi rendre les mathématiques plus concrètes.

Outre ces différentes parties, certains pictogrammes t'aideront à t'y retrouver :

xx Cahier — Ouvre ton cahier aux pages indiquées pour réaliser les exercices correspondants.

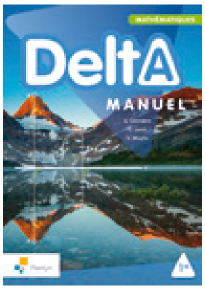
Cela t'indique qu'il s'agit d'une matière de « dépassement », qui sera vue dans les années à venir mais que l'on aborde parfois déjà, pour te préparer.

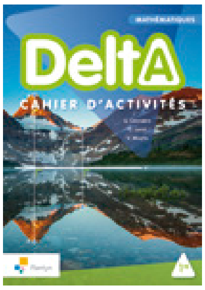
Introduction à l'attention des enseignant(e)s

Delta est une collection de mathématiques à l'attention des 1re, 2e, 3e et 4e années de l'enseignement général secondaire. Vous avez entre les mains le manuel destiné à la 1re année du secondaire.

Cette collection a été développée en concordance avec les socles de compétences et les différents programmes de mathématiques et avec la volonté de respecter leur philosophie.

Cette collection se compose de trois supports par année :
1. **Un manuel**
2. **Un cahier d'activités**
3. **Un Kit du professeur**





L'ambition de la méthode Delta est de proposer à l'enseignant(e) :

- des outils parfaitement adéquats pour mettre en place les programmes et la pédagogie par compétence ;
- une forme attractive qui permet à l'élève de travailler les mathématiques grâce à des supports agréables ;
- une philosophie qui encourage l'autonomie de l'élève et le forme à la résolution de tâches complexes ;
- un respect sans faille des prescrits légaux et des évaluations conformes aux directives ;
- des tâches formatives pour exercer l'élève aux tâches complexes proposées en évaluation ;
- une approche numérique complète et intégrée via le Kit du professeur et le manuel numérique.

1. TÂCHE DE COMPÉTENCE CIBLE

Il existe un nouveau jeu à la mode sur Internet. Malheureusement, il n'est accessible qu'aux jeunes qui disposent du code d'accès.
Celui-ci se compose de 5 lettres et de 9 chiffres.
Tu trouveras l'ordre des lettres en classant par ordre croissant les nombres de l'exercice 1.
Tu découvriras les 9 chiffres en résolvant l'exercice 2.

Quel est ce code ?

Exercice 1 : Classe par ordre croissant les 5 nombres suivants.

A	B	C	D	E
$-0{,}245$	$\frac{13}{6}$	$5{,}2$	-7	$\frac{-13}{16}$

Exercice 2 : Place les chiffres de 1 à 9 dans le tableau ci-dessous afin que le produit de chaque colonne, chaque ligne et la diagonale corresponde au nombre indiqué en bordure du tableau.

①	②	③	84
④	⑤	⑥	108
⑦	⑧	⑨	40
48	120	63	8

▶ **Le code à trouver est :**

Code lettre					Code chiffre								
					①	①	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨

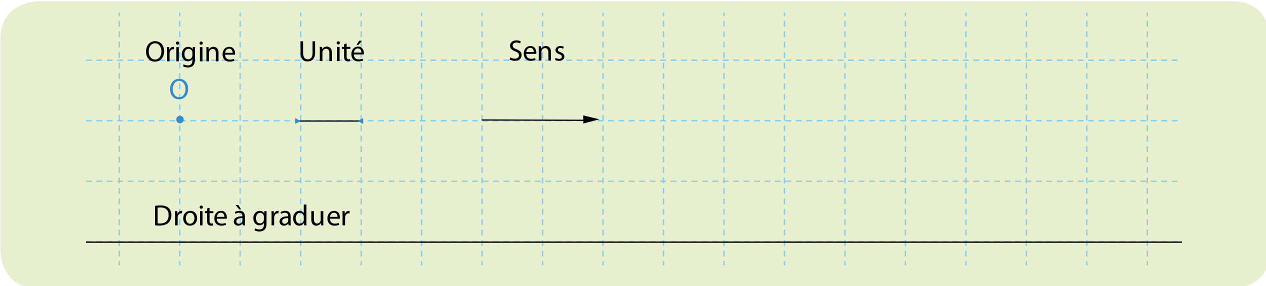
THÉORIE

A. La relation d'ordre

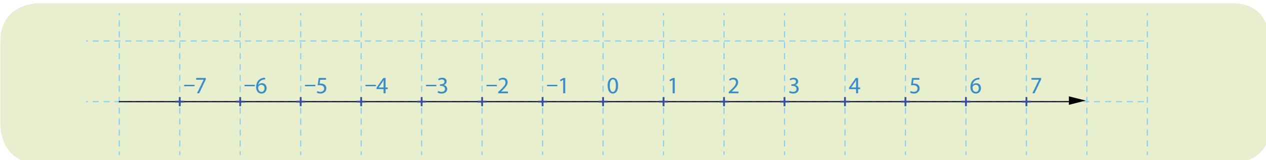
24-38 Cahier

A.1. La droite graduée

Une **droite graduée** est une droite déterminée par les éléments suivants :
- une **origine** : l'origine est le point « zéro » de la droite ;
- une **unité** : l'unité sera reportée sur la droite pour établir la graduation ;
- un **sens** : le sens permet de distinguer les nombres positifs des nombres négatifs.

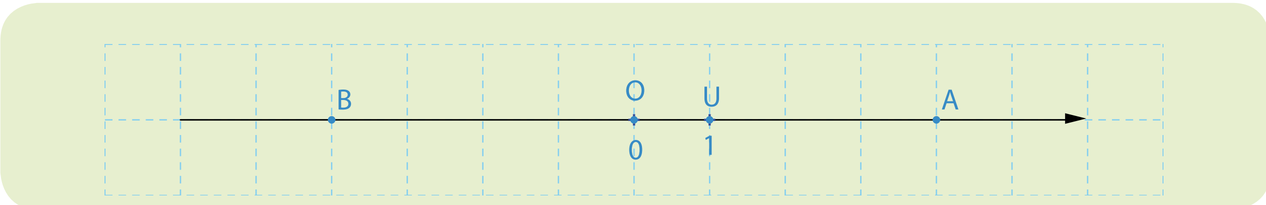


Ce qui donne la droite graduée suivante :



L'**abscisse** d'un point est le nombre qui permet de repérer la position de ce point sur la droite.

Exemples :



L'abscisse du point A est 4. On note abs (A) = 4

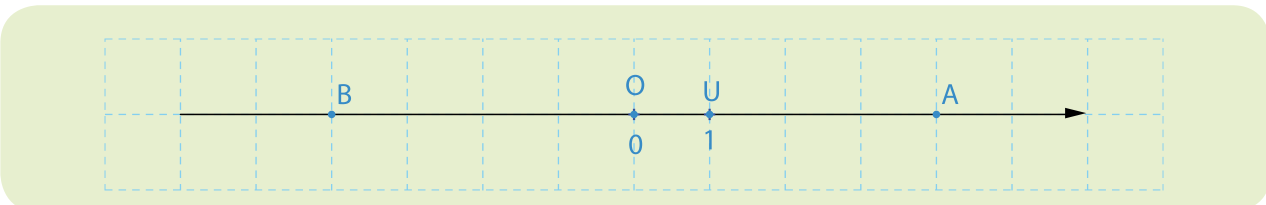
L'abscisse du point B est –4. On note abs (B) = –4

L'abscisse du point O est 0. On note abs (O) = 0

L'abscisse du point U est 1. On note abs (U) = 1

A.2. Valeur absolue et nombres opposés

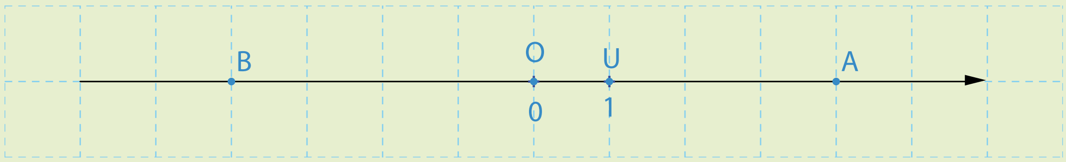
Sur la droite graduée ci-dessous, les points A et B ont la particularité d'être à égale distance du point d'origine O. Autrement dit : le point O est au milieu du segment [AB].



En termes de distance : $|OA| = |OB|$.

La **valeur absolue** d'un nombre sera définie comme étant la distance entre le point dont le nombre est l'abscisse et l'origine du repère.
La valeur absolue d'un nombre est toujours positive.
On note la valeur absolue par $|\ldots|$.

Exemple :



La distance entre O et A vaut 4. On note $|OA| = 4$

La valeur absolue de 4 est 4. On note $|4| = 4$

La distance entre O et B vaut 4. On note $|OB| = 4$

La valeur absolue de -4 est 4. On note $|-4| = 4$

Deux nombres sont **opposés** si leur somme s'annule.
Deux nombres opposés ont donc la même valeur absolue et sont de signes contraires.
(-4) et $(+4)$ sont des nombres opposés car $(+4) + (-4) = 0$

A.3. Comparaison des nombres

Il existe 5 symboles différents pour exprimer la comparaison entre deux expressions numériques :

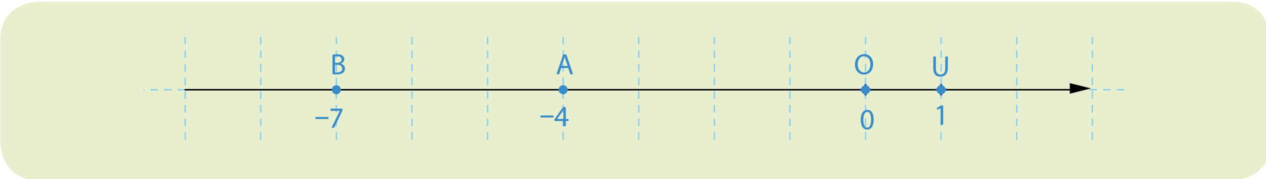
Symbole	$<$	$\leqslant$	$=$	$\geqslant$	$>$
Expression	$a < b$	$a \leqslant b$	$a = b$	$a \geqslant b$	$a > b$
Signification	*a* est strictement inférieur à *b*.	*a* est inférieur ou égal à *b*.	*a* est égal à *b*.	*a* est supérieur ou égal à *b*.	*a* est strictement supérieur à *b*.
Exemple	$-2 < 5$	$3 \leqslant 5$ $5 \leqslant 5$	$\lvert -3 \rvert = \lvert 3 \rvert$	$8 \geqslant 2$ $8 \geqslant 8$	$4 > -9$

COMMENTAIRES

Quand on compare des nombres, on parlera d'ordre croissant s'ils sont classés du plus petit au plus grand et d'ordre décroissant dans le cas contraire.

Exemples : $2 < 3 < 8 < 19$ sont classés par ordre croissant.
$19 > 8 > 3 > 2$ sont classés par ordre décroissant.

Quand on compare deux nombres négatifs, le plus grand des deux est celui qui a la plus petite valeur absolue. Pour s'en convaincre, on peut placer les points correspondant à l'abscisse des nombres sur une droite graduée.



Pour comparer –4 *et* –7*, on compare leurs valeurs absolues :* $|-4| = 4$ *et* $|-7| = 7$.
Comme $4 < 7$*, alors* $-4 > -7$.

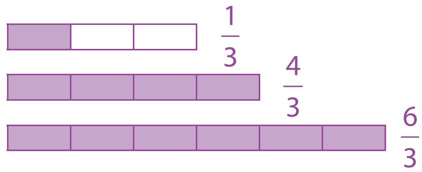
A.4. Comparer deux fractions

Il existe plusieurs méthodes pour **comparer deux fractions**.

- Si les fractions sont de même dénominateur, la plus grande est celle dont le numérateur est le plus grand.

  Exemple :

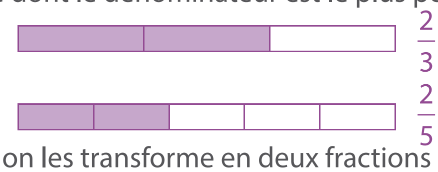
  Comparons $\frac{4}{3}$ et $\frac{6}{3}$ → Comme $4 < 6$, alors $\frac{4}{3} < \frac{6}{3}$.



- Si les fractions sont de même numérateur, la plus grande est celle dont le dénominateur est le plus petit.

  Exemple :

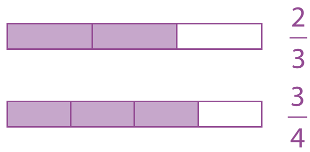
  Comparons $\frac{2}{3}$ et $\frac{2}{5}$ → Comme $3 < 5$, alors $\frac{2}{3} > \frac{2}{5}$.



- Si les fractions sont de numérateurs et dénominateurs différents, on les transforme en deux fractions de même dénominateur.

  Exemple :

  Comparons $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{4}$ → Comme $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$, $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$ et que $3 < 9$, alors $\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$.



Mais avant tout, il faut être logique :

- Si les signes sont différents, la plus grande fraction est évidemment la positive.
- Pense aussi à diviser de tête… $\frac{9}{4} > \frac{2}{5}$ car $\frac{9}{4} > 1$ et $\frac{2}{5} < 1$

A.5. Arrondir ou encadrer un nombre

Arrondir un nombre

Pour **arrondir** un nombre au rang *R*, on regarde le chiffre de la partie décimale situé au rang directement à droite.

Si ce chiffre est 0, 1, 2, 3 ou 4, on arrondit « vers le bas ».

Si ce chiffre est 5, 6, 7, 8 ou 9, on arrondit « vers le haut ».

Exemples :

- Arrondir à l'unité 17,812

  → On regarde le chiffre situé à droite du chiffre des unités → 17,812 sera arrondi à 18.

- Arrondir au dixième 2,345

  → On regarde le chiffre situé à droite du chiffre des dixièmes → 2,345 sera arrondi à 2,3.

A.5. Encadrer un nombre

Un exemple pour comprendre : cherchons à encadrer la fraction $\frac{13}{3} = 4{,}33333\ldots$

Précision	Représentation sur une droite graduée	Encadrement	Valeur approchée par défaut	Valeur approchée par excès
À l'unité	$\frac{13}{3}$; 4 ; 5	$4 < \frac{13}{3} < 5$	4	5
Au dixième près	$\frac{13}{3}$; 4,3 ; 4,4	$4{,}3 < \frac{13}{3} < 4{,}4$	4,3	4,4
Au centième près	$\frac{13}{3}$; 4,33 ; 4,34	$4{,}33 < \frac{13}{3} < 4{,}34$	4,33	4,34

La **valeur approchée par défaut (VAD)** est la borne inférieure de l'encadrement.
La **valeur approchée par excès (VAE)** est la borne supérieure de l'encadrement.

B. La relation de divisibilité

39-49 Cahier

B.1. Diviseurs et multiples

Les **diviseurs** d'un nombre sont les nombres qui divisent ce nombre.
Il y en a un nombre fini. (On peut les compter.)
L'ensemble des diviseurs d'un nombre n se note div $n = \{\ldots\}$

Exemple : div 24 = {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24}

Il y a 8 diviseurs pour le nombre 24.
Petit truc pour les trouver facilement : les diviseurs « vont toujours par deux » : 1 et 24 ; 2 et 12 ; 3 et 8 ; 4 et 6 (sauf parfois celui du milieu qui sera alors multiplié par lui-même).

Les **multiples** d'un nombre sont les nombres qui sont divisibles par ce nombre.
Il y en a une infinité. (On ne peut pas les compter.)
L'ensemble des multiples d'un nombre n se note $n\mathbb{N}$.

Exemple : l'ensemble des multiples de 3 se note $3\mathbb{N}=\{0, 3, 6, 9, 12,\ldots\}$

Il s'agit en fait des nombres de la table de 3.

VOCABULAIRE

Dire « est diviseur de » ou « divise » est équivalent.

Dire « est un multiple de » ou « est divisible par » est équivalent.

Ainsi, « 3 est un diviseur de 18 » et « 3 divise 18 » sont des phrases équivalentes.

Mais on dira « 18 est un multiple de 3 » ou « 18 est divisible par 3 ».

Propriétés

- 1 divise tous les nombres.
- 0 ne divise aucun nombre.
- 0 est multiple de tous les nombres.
- Tous les nombres sont divisibles par eux-mêmes.

La théorie	Un exemple pour comprendre
Si *a*, *b*, *c* sont des nombres naturels et si *b* et *c* sont non nuls alors la relation « $a = b \cdot c$ » exprime que : *b* et *c* divisent *a* ; *b* et *c* sont des diviseurs de *a* ; *a* est multiple de *b* et de *c* ; *a* est divisible par *b* et *c*.	Soit 18, 3, 6 des nombres naturels avec 3 et 6 qui sont évidemment différents de zéro, alors la relation « $18 = 3 \cdot 6$ » exprime que : 3 et 6 divisent 18 ; 3 et 6 sont des diviseurs de 18 ; 18 est multiple de 3 et de 6 ; 18 est divisible par 3 et 6.

B.2. Nombres premiers

Un **nombre premier** est un nombre qui n'admet que deux diviseurs distincts : 1 et lui-même.

Exemple : 5 est un nombre premier car div 5 = {1,5} (deux diviseurs).

Contre-exemple : 1 n'est pas un nombre premier car div 1 = {1} (un seul diviseur).
6 n'est pas un nombre premier car div 6 = {1, 2, 3, 6} (quatre diviseurs).

Reconnaître les nombres premiers inférieurs à 100

Le crible d'Ératosthène peut être utilisé pour déterminer de façon raisonnée les nombres premiers inférieurs à 100.

En effet, il « suffit » d'un peu d'organisation :

- On commence par barrer 1, car ce n'est pas un nombre premier.
- Le nombre qui suit (2) est premier.
- On barre en bleu tous les multiples de 2 car ce ne sont pas des nombres premiers.
- Le nombre qui suit (3) est premier.
- On barre en vert tous les multiples de 3 car ce ne sont pas des nombres premiers.
- 5 est un nombre premier.
- On barre en mauve tous les multiples de 5 car ce ne sont pas des nombres premiers.
- 7 est un nombre premier.
- On barre en jaune tous les multiples de 7 car ce ne sont pas des nombres premiers.

Les nombres qui ne sont pas barrés sont les nombres premiers plus petits que 100.

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

B.3. Caractères de divisibilité

Souviens-toi…
Un nombre est divisible par…

2 SI son dernier chiffre est pair (0, 2, 4, 6 ou 8)

Exemple : 18 95**4** est divisible par 2 car il se termine par 4.

Contre-exemple : 189 52**5** n'est pas divisible par 2 car il ne se termine pas par 0, 2, 4, 6 ou 8.

4 SI ses deux derniers chiffres forment un multiple de 4 (00, 04, 08, 12, 16, 20, …)

Exemple : 18 9**24** est divisible par 4 car 24 est un multiple de 4.

Contre-exemple : 189 5**25** n'est pas divisible par 4 car 25 n'est pas un multiple de 4.

8 SI ses trois derniers chiffres forment un multiple de 8 (000, 008, 016, …)

Exemple : 18 **824** est divisible par 8 car 824 est un multiple de 8 (800 + 24).

Contre-exemple : 9**417** n'est pas divisible par 8 car 417 n'est pas un multiple de 8 (400 + 16 + 1).

5 SI son dernier chiffre est un multiple de 5 (0 ou 5)

Exemple : 18 95**5** est divisible par 5 car il se termine par 5.

Contre-exemple : 189 52**2** n'est pas divisible par 5 car il ne se termine ni par 0 ni par 5.

25 SI ses deux derniers chiffres forment un multiple de 25 (00, 25, 50 ou 75)

Exemple : 18 9**75** est divisible par 25 car 75 est un multiple de 25.

Contre-exemple : 189 5**28** n'est pas divisible par 25 car 28 n'est pas un multiple de 25.

125 SI ses trois derniers chiffres forment un multiple de 125 (000,125, 250, 375, 500, …)

Exemple : 18 **875** est divisible par 125 car 875 est un multiple de 125.

Contre-exemple : 189 **417** n'est pas divisible par 125 car 417 n'est pas un multiple de 125.

3 SI la somme des chiffres[1] qui le compose forme un multiple de 3 (0, 3, 6, 9, …)

Exemple : 1875 est divisible par 3 car 1 + 8 + 7 + 5 = 21 et que 21 est un multiple de 3.

Contre-exemple : 1417 n'est pas divisible par 3 car 1 + 4 + 1 + 7 = 13 et que 13 n'est pas un multiple de 3.

9 SI la somme des chiffres qui le compose forme un multiple de 9 (0, 9, 18, 27, …)

Exemple : 18 756 est divisible par 9 car 1 + 8 + 7 + 5 + 6 = 27 et que 27 est un multiple de 9.

Contre-exemple : 1417 n'est pas divisible par 9 car 1 + 4 + 1 + 7 = 13 et que 13 n'est pas un multiple de 9.

B.4. Propriétés des diviseurs

Tu les appliques depuis longtemps, mais on va les formaliser…

La théorie	Un exemple pour comprendre
Tout nombre qui divise deux autres nombres divise leur somme et leur différence.	**SI** 7 divise 700 et 7 divise 14 **Alors** 7 divise 714 (la somme : 700 + 14 = 714) 7 divise 686 (la différence : 700 – 14 = 686)
Tout nombre qui divise un autre nombre divise aussi ses multiples.	**SI** 7 divise 49 **Alors** 7 divise 98 (98 = 49 x 2) 7 divise 147 (147 = 49 x 3)

1 Il va de soi que comme les chiffres sont des caractères, ils ne peuvent être additionnés. Cependant, par abus de langage, nous parlerons de chiffres au lieu de dire que nous faisons la somme des nombres composés d'un chiffre qui composent le nombre.

À quoi peuvent servir ces propriétés ?

On utilisera ces propriétés pour :

- justifier certains caractères de divisibilité.
- vérifier si un nombre est divisible par un autre.

Exemple : 7 divise 434 car 7 divise 420 (420 : 7 = 60) et 14 (14 : 7 = 2).
Donc 434 : 7 = (420 + 14) : 7 = 420 : 7 + 14 : 7 = 60 + 2 = 62

B.5. Factorisation première d'un nombre naturel

La **factorisation première** d'un nombre naturel est l'écriture de ce naturel sous la forme d'un produit de facteurs premiers.

Exemple :

$18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$ → $2 \cdot 3 \cdot 3$ est la factorisation première de 18. (2 et 3 sont bien des nombres premiers).
$2 \cdot 3^2$ est une autre manière d'écrire la factorisation première de 18.

Contre-exemple :

$18 = 2 \cdot 9$ mais $2 \cdot 9$ n'est pas une factorisation première de 18 car 9 n'est pas un nombre premier.

Méthodes pour factoriser un nombre

Mieux que de longs discours… un exemple :

1260	2
630	2
315	3
105	3
35	5
7	7
1	

Uniquement des nombres premiers et de préférence dans l'ordre croissant

$$1260 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$
$$= 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$$

D'autres rubriques dans le cahier:

Travaille tes compétences — 50 Cahier
Préparе ton évaluation — 53-54 Cahier
Mathématiques sans frontières — 52 Cahier
Exercices supplémentaires — 54-58 Cahier

3. CARTE DU CHAPITRE

- Des nombres qui s'organisent
  - La relation d'ordre
    - Droite graduée
    - Valeur absolue
    - Comparer
    - Arrondir
    - Encadrer
  - La relation de divisibilité
    - Les diviseurs
      - Les nombres premiers inférieurs à 100
      - Les caractères de divisibilité
      - Deux relations des diviseurs d'un nombre
      - La décomposition première d'un nombre
    - Les multiples

4. AI-JE BIEN COMPRIS ?

Vrai ou faux … Et surtout, justifie !!!

a) Une droite graduée doit toujours être orientée vers la droite.

b) Deux nombres qui ont la même valeur absolue sont opposés.

c) Si le point A a pour abscisse 2,5, alors sa valeur absolue vaut 2,5.

d) La valeur absolue d'un nombre peut être un nombre négatif.

e) La valeur absolue d'un nombre est toujours un nombre positif.

f) Si deux nombres différents ont la même valeur absolue, alors ils sont opposés.

g) Si *a* est plus petit que *b* et *b* plus petit que *a*, alors *a* et *b* sont égaux.

h) $\frac{3}{8} > \frac{6}{24}$; $\frac{5}{2} \leqslant \frac{10}{4}$

i) Il y a une infinité de diviseurs d'un nombre.

j) Les multiples d'un nombre sont toujours plus grands que le nombre.

k) Les diviseurs d'un nombre sont toujours plus petits que le nombre.

l) « Est diviseur de » et « divise » sont deux relations équivalentes.

m) « Est un multiple de » et « est diviseur de » sont deux relations équivalentes.

n) 3 divise 18 ; 18 divise 18

o) 0 est un multiple de 3.

p) 1 est multiple de tous les nombres.
0 est diviseur de tous les nombres.

q) Tous les nombres sont divisibles par eux-mêmes.

r) 5 est un nombre premier.
1 est un nombre premier.
19 est un nombre premier.

s) $3 \cdot 5 \cdot 5$ est la factorisation première de 75.
$3 \cdot 4 \cdot 5$ est la factorisation première de 60.

t) Quelle propriété utilises-tu pour savoir si :
143 est divisible par 13.
693 est divisible par 7.
130 000 est divisible par 13.

La petite gazette

Fibonacci et les lapins

▸ *Léonardo Fibonacci* est né à Pise en Italie vers 1175. C'est sans doute un des plus grands mathématiciens de son époque. Il est aussi connu sous le nom de Léonard de Pise.

C'est lors de ses nombreux voyages pour le compte de son père (un représentant des marchands de la république de Pise) qu'il découvre et rapporte à Pise les chiffres arabes et la notation algébrique.

Le livre le plus connu de Fibonacci est sans conteste le *Liber Abaci*, où il pose un problème qui décrit la croissance d'une population de lapins : « Un homme met un couple de lapins dans un lieu isolé de tous les côtés par un mur. Combien de couples obtient-on en un an si chaque couple engendre tous les mois un nouveau couple à compter du troisième mois de son existence ? »

La solution de ce problème est la suite de nombres {1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, …}. Essaye de découvrir quelques propriétés de cette suite…

Fibonacci et la poésie

Plus surprenant est ce poème – un fib – dû à Marc Lebel.

Toute
La
Beauté
De ce monde
Qui tient sur six lignes
Et en chante la gratuité

6 vers ; 20 syllabes ; chacun des vers compte autant de syllabes que sa position dans la suite de Fibonacci à savoir 1/1/2/3/5/8.

Retrouve d'autres fibs sur le site de l'auteur :

▸ http://mlebelm.ca/index.php?Fibs-a-la-fibonacci

2 est-il un nombre premier ?

Pour certains mathématiciens non, car un nombre premier est impair…

5 minus 2 aequalis 3

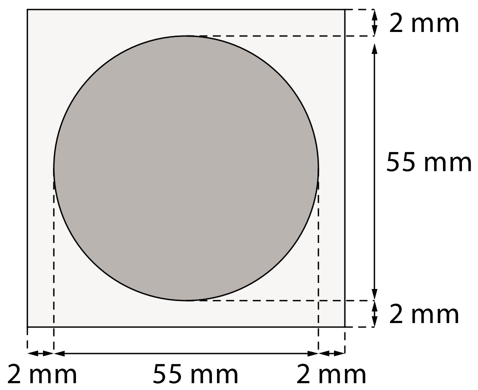
C'est de cette manière que l'on écrivait 5 – 2 = 3 avant 1600 !!!
Jusque 250 avant notre ère, le calcul était écrit avec des mots. Entre -250 et le 16e siècle, les mots sont remplacés par des abréviations. Les symboles + et – sont apparus en 1514. Robert Recorde invente en 1557 le symbole d'égalité « = ».
En 1637 est publié un livre posthume de Thomas Harriot dans lequel apparaît : *Signum minoritatis ut a < b significet a minorem quam b.*
C'est la première apparition du symbole « < ».

1. TÂCHE DE COMPÉTENCE CIBLE

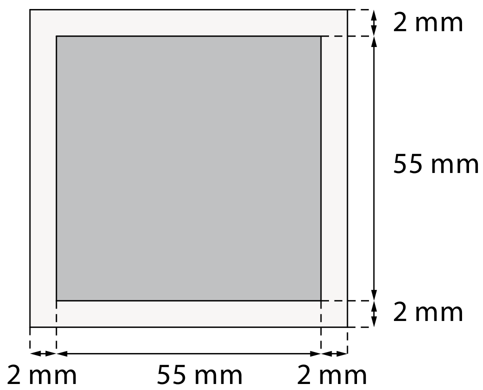
Pour faciliter l'emballage de petits pots de crème hydratante, un producteur de produits cosmétiques souhaite les mettre dans des boîtes de forme parallélépipédique, les plus petites possibles.
Il a remis à l'entreprise chargée de la réalisation les croquis suivants.
Remarque : ces croquis ne respectent pas les proportions !

Le pot de crème

La vue d'en haut dans la boîte



La vue de face dans la boîte



Pour la décoration, il a prévu lui-même des textes, mais il souhaite que les faces parallèles des boîtes soient de la même couleur.

▶ **Réalise un projet pour cet emballage.**

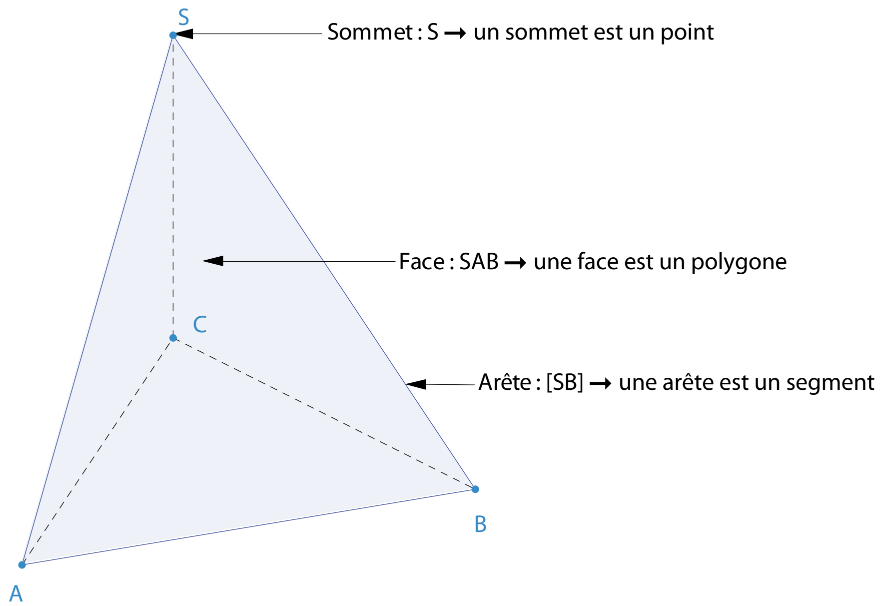
A. Classification des solides

274-283 Cahier

A.1. Classification

- **Les solides**
  - **Les non-polyèdres**
    - **Les corps hybrides** — *cône, cylindre, ...*
    - **Les corps ronds** — *sphère*
  - **Les polyèdres**
    - **Polyèdres non réguliers**
    - **Polyèdres réguliers** — *tétraèdre, cube, octaèdre, dodécaèdre, icosaèdre*
    - **Prismes droits** — *parallélipipède rectangle, cube, ...*
    - **Pyramide**

A.2. Définition de polyèdre

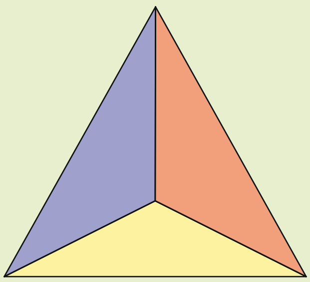
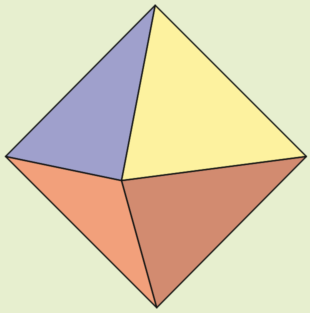
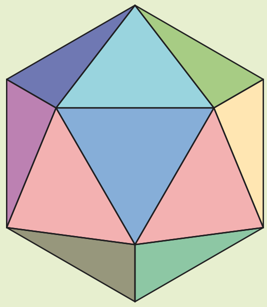


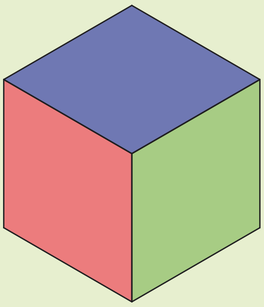
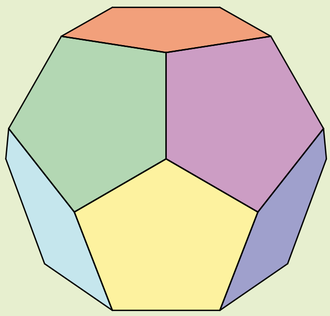
- Un **polyèdre** est un solide qui a des faces planes *polygonales*.
- Les côtés des faces sont les arêtes du polyèdre ; chaque arête est commune à deux faces.
- Les extrémités des arêtes sont les sommets du polyèdre ; chaque sommet est commun à trois arêtes ou plus.

A.3. Définition de polyèdre régulier

- Un **polyèdre régulier** est un polyèdre dont les faces sont des polygones réguliers isométriques.

Remarque : la somme des amplitudes des angles issus d'un même sommet est égale pour chacun de ses sommets.

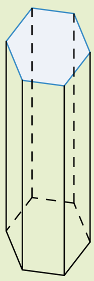
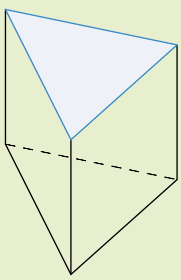
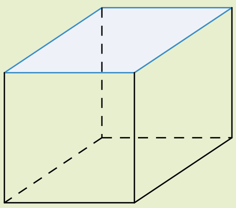
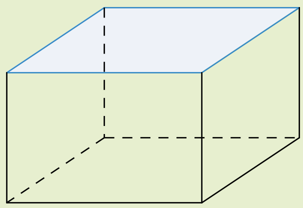
Polyèdres formés avec des triangles équilatéraux		
 Tétraèdre régulier, 4 faces	 Octaèdre régulier, 8 faces	 Icosaèdre régulier, 20 faces

Polyèdre formé avec des carrés	***Polyèdre formé avec des pentagones réguliers***
 Cube ou hexaèdre régulier, 6 faces	 Dodécaèdre, 12 faces

A.4. Définition de prisme droit

- Un **prisme droit** est un polyèdre qui possède :
  - deux faces parallèles isométriques : ses bases ;
  - des faces rectangulaires perpendiculaires aux bases, ce sont les faces latérales.

Remarque : les arêtes qui joignent les sommets des bases sont des hauteurs du prisme droit.

Prisme à base hexagonale	Prisme à base triangulaire	Cube	Parallélépipède rectangle
			

Remarque

Deux relations permettent d'effectuer un dénombrement dans les solides.

- Dans un polyèdre, le nombre des arêtes (A) est égal à la somme des nombres des faces (F) et des sommets (S) diminuée de 2.

$$S + F - 2 = A$$

Exemple :
un cube : 12 arêtes
6 faces
8 sommets
$\rightarrow$ $8 + 6 - 2 = 12$

- Si n est le nombre de côtés d'une des bases d'un prisme,

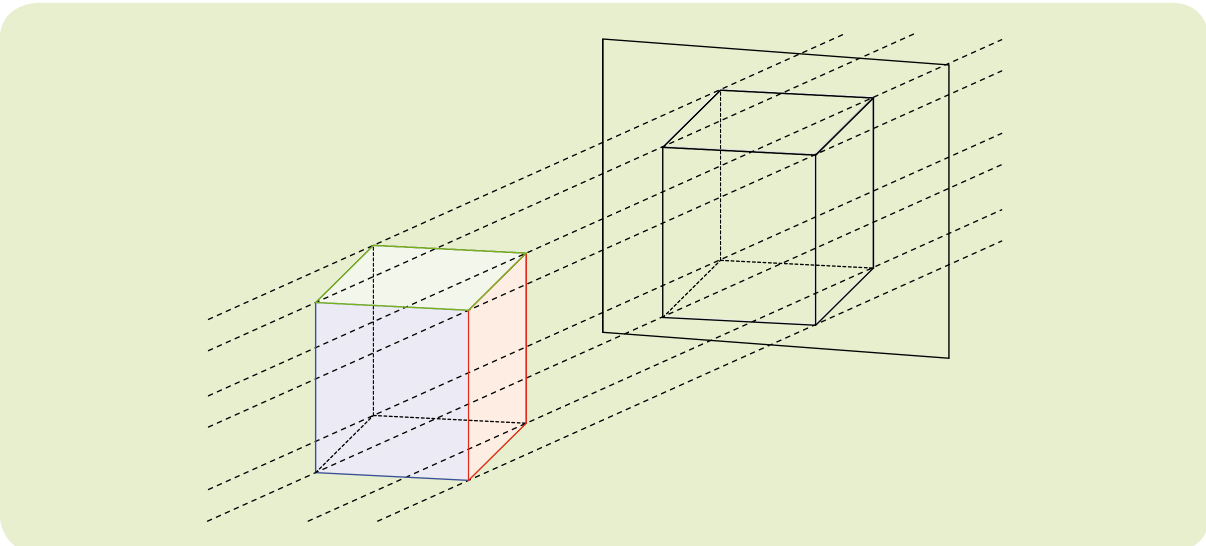
$$\text{alors} \begin{cases} n + 2 \text{ est le nombre de faces} \\ 2n \text{ est le nombre de sommets} \\ 3n \text{ est le nombre d'arêtes} \end{cases}$$

Exemple:
un cube a 4 côtés sur une base.
$\rightarrow$ $4 + 2 = 6 \rightarrow$ nombre de faces
$4 \cdot 2 = 8 \rightarrow$ nombre de sommets
$4 \cdot 3 = 12 \rightarrow$ nombre d'arêtes

B. Représentation des solides en perspective cavalière

284-289 Cahier

- La **perspective cavalière** est une technique qui permet de donner une représentation plane des solides.



- En perspective cavalière :
  - les faces frontales sont représentées en grandeurs réelles ;
  - la représentation en perspective cavalière conserve le parallélisme ;
  - les arêtes fuyantes sont représentées par des segments de longueur inférieure au côté du cube et inclinés d'un angle compris entre 45° et 60° par rapport à l'horizontale ;
  - les arêtes cachées sont tracées en pointillé.

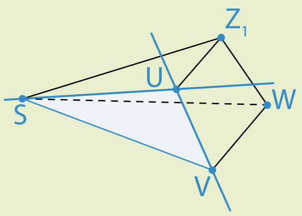
Pour les reconnaître facilement, il suffit d'identifier la face avant et de la colorier très légèrement.

C. Positions relatives des droites et des plans

289-294 Cahier

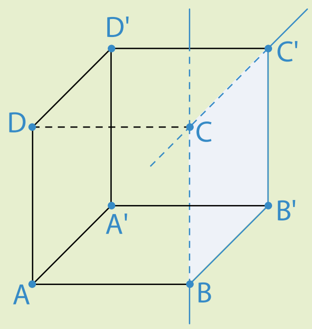
Positions de deux droites dans l'espace

Droites sécantes



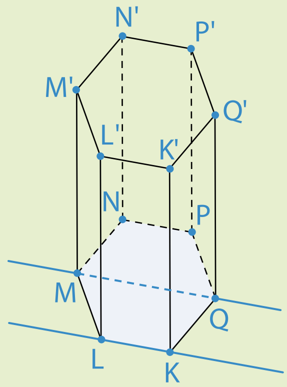
SU et UV sont sécantes en U.

Droites perpendiculaires



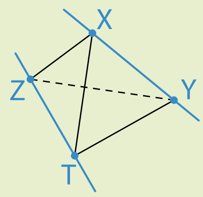
CC' et BC sont perpendiculaires*.

Droites parallèles



KL et MQ sont parallèles.

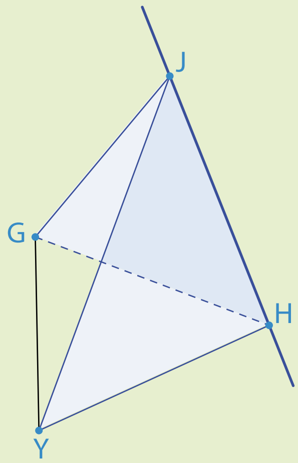
Droites gauches



ZT et XY sont gauches.

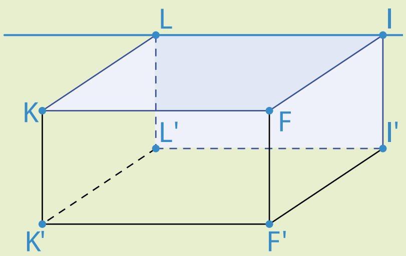
Positions de deux plans

Plans sécants



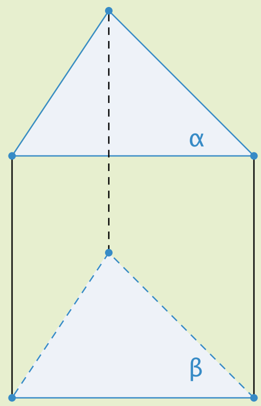
Les plans JYH et JGH ont la droite HJ en commun.

Plans perpendiculaires



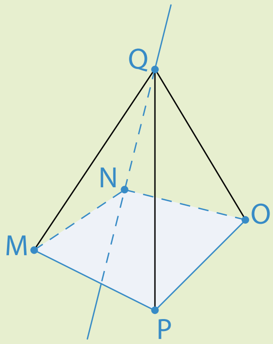
Les plans LIF et LII' se coupent en formant des angles droits.

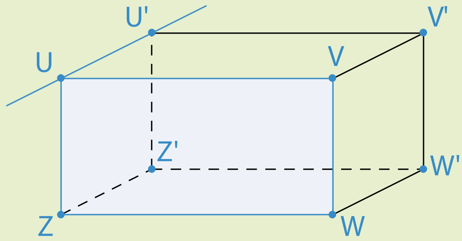
Plans parallèles

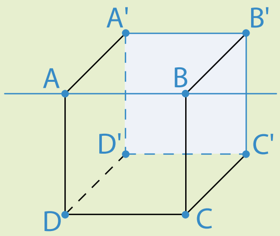


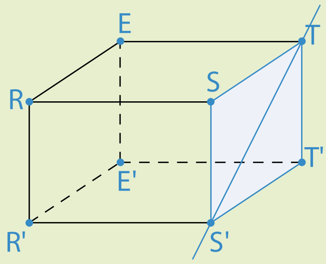
Les plans α et β n'ont aucun point en commun.

* Des droites perpendiculaires sont forcément sécantes.

<table>
<tr><th colspan="2">Positions d’une droite et d’un plan</th></tr>
<tr><td>Droite sécante à un plan


La droite QN coupe le plan MPO en N.</td><td>Droite perpendiculaire à un plan


La droite UU’ forme des angles droits avec les droites incluses dans le plan UVW.</td></tr>
<tr><td>Droite parallèle à un plan


La droite AB et le plan A’B’C’ n’ont aucun point commun.</td><td>Droite incluse dans un plan


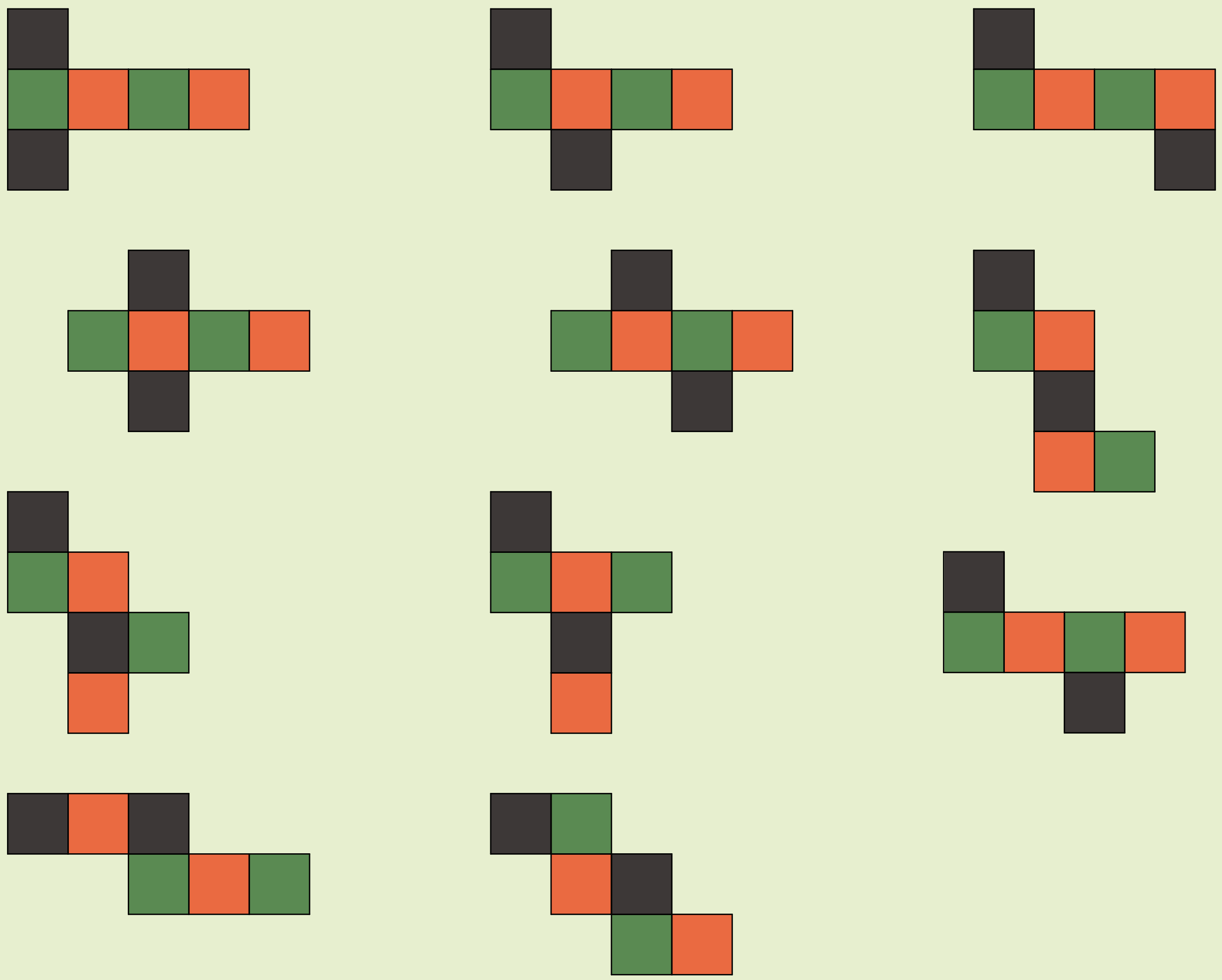
Tous les points de la droite TS’ sont des points du plan STT’.</td></tr>
</table>

D. Les développements des solides

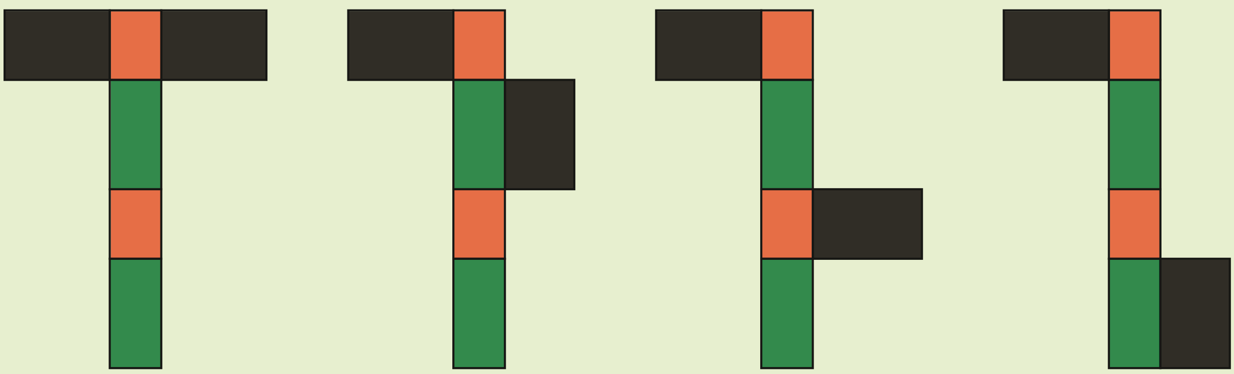
294-296 Cahier

Un **développement d'un solide** est un patron dessiné sur une feuille. En le découpant et en le pliant, il est possible de réaliser ce solide.

Les développements du cube



Quelques développements du parallélépipède rectangle



Il existe 54 patrons du parallélépipède rectangle!

3. CARTE DU CHAPITRE

- **Des figures qui prennent du volumes**
  - Classification
    - Non-polyèdre
    - Polyèdre (définition)
      - Non réguliers
      - Réguliers → définition
      - Prismes droits → définition
      - Pyramides
  - Représentation en perspective cavalière
  - Positions relatives
    - De deux droites
      - Sécantes
        - Perpendiculaires
      - Parallèles
        - Distinctes
        - Confondues
      - Gauches
    - De deux plans
      - Sécants
        - Perpendiculaires
      - Parallèles
    - D'une droite et d'un plan
      - Sécants
        - Perpendiculaires
      - Parallèles
      - Incluse
  - Développements
    - Cube
    - Parallélépipède rectangle

D'autres rubriques dans le cahier:

Travaille tes compétences	298 Cahier
Mathématiques sans frontières	300 Cahier
Prépare ton évaluation	301-302 Cahier
Exercices supplémentaires	302-304 Cahier

4. AI-JE BIEN COMPRIS ?

1. Complète par Vrai ou Faux. Justifie ta réponse.

a) Un solide n'est pas à la fois prisme droit et polyèdre régulier.

b) Un dodécaèdre a des faces triangulaires.

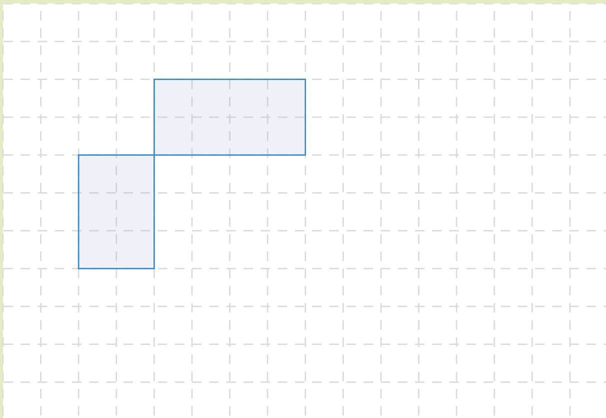
c) « Cube » est synonyme de « hexaèdre régulier ».

d) Le solide qui a le moins de sommets possibles est le tétraèdre.

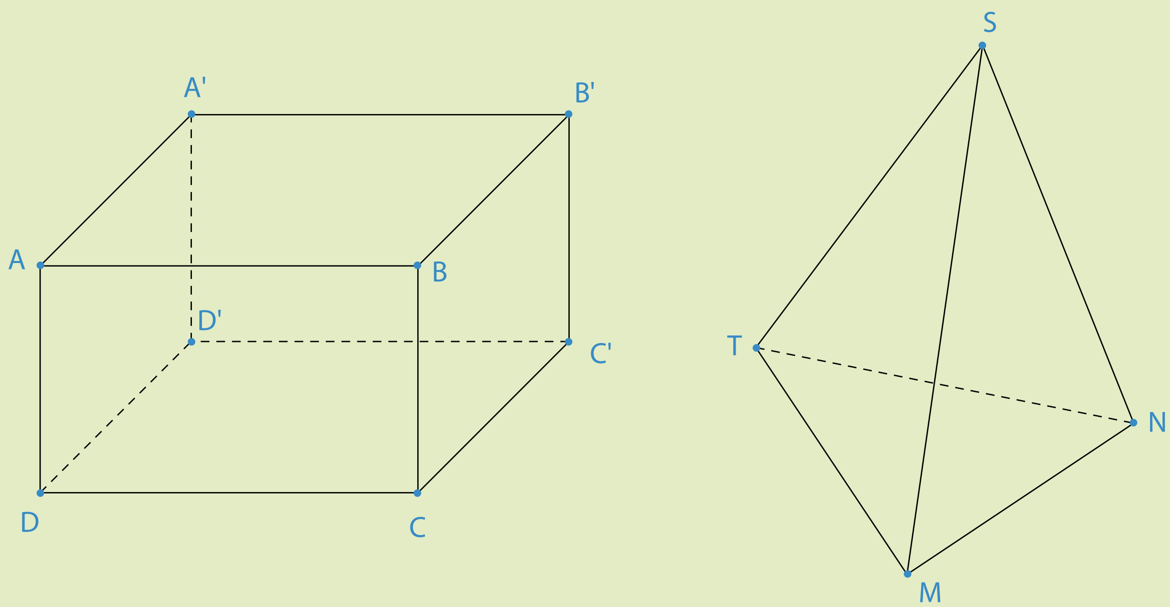
2. Parmi les solides suivants, retrouve les prismes droits.

Un cube, un cylindre, une pyramide à base carrée, un parallélépipède rectangle, un tétraèdre.

3. Recopie et complète le développement de ce parallélépipède rectangle.



4. Observe les solides pour répondre aux questions.



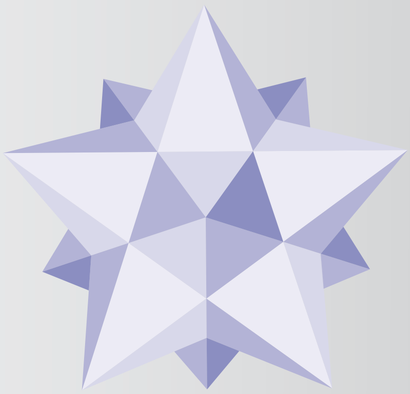
1. Complète : AA'…AB
2. Écris le nom des droites qui sont parallèles à AA'D' et qui passent par B'
3. Cite 2 paires de droites gauches
4. Cite le nom de la face cachée

La petite gazette

Construction des deux dodécaèdres étoilés de Kepler-Poinsot

Le grand dodécaèdre étoilé

Ce polyèdre possède 20 sommets. Le grand dodécaèdre étoilé possède 12 faces qui sont des pentagones étoilés.



Ce polyèdre possède 12 sommets. Il possède ainsi 12 faces qui sont des pentagones étoilés.

- Pour réaliser un modèle du grand dodécaèdre, partir d'un icosaèdre et coller sur ses 20 faces des petites pyramides, dont les faces latérales sont des triangles correspondant aux parties visibles des faces.

- Pour réaliser un modèle du petit dodécaèdre, partir d'un dodécaèdre et coller sur ses 12 faces des petites pyramides, dont les faces latérales sont des triangles correspondant aux parties visibles des faces.

Leonhard Euler

Il est difficile de dresser le portrait de Leonhard Euler en quelques lignes. Ce mathématicien suisse (1707-1783) a grandement participé à l'expansion des connaissances mathématiques.

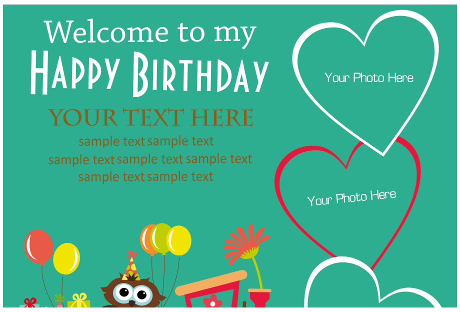
Il a ainsi introduit les notations modernes de trigonométrie et est connu pour ses contributions en analyse, en géométrie, théorie des graphes, mais aussi en physique (dynamique des fluides, optique, astronomie). Il a également côtoyé des grands mathématiciens tels que Daniel et Nicolas Bernouilli, Christian Goldbach.

Son nom est éternellement associé à une constante (e = 2,71828…) appelée « nombre d'Euler ».

Le mathématicien et philosophe français Nicolas de Condorcet termina l'éloge funèbre de Leonhard Euler, qu'il fit pour l'Académie française par ces mots : « … il cessa de calculer et de vivre ».

1. TÂCHE DE COMPÉTENCE CIBLE

Tu souhaites réaliser des invitations pour ton anniversaire. Tu as trouvé l'illustration suivante. Malheureusement, les dimensions de l'image sont de seulement 4 cm sur 6 cm et tes cartes sont de 10 cm sur 15 cm.



▶ Est-il possible d'imprimer entièrement l'image sans qu'elle soit découpée ?
Si oui, quel sera le pourcentage d'agrandissement que tu devras définir ?

▶ Et pour une photo dont les dimensions sont de 4,2 cm sur 6,4 cm ?

A. La règle de trois

308-310 Cahier

A.1. Définition

On applique la **règle de trois** si un problème respecte les trois conditions suivantes :

1. **Trois** nombres sont donnés dans l'énoncé.
2. **Deux** grandeurs sont liées par une relation.
3. **Une** relation entre les grandeurs est donnée.

Exemple :
Un paquet de deux ampoules basse consommation coûte 10 euros. Combien coûtent neuf ampoules ?

Trois nombres	2, 10 et 9
Deux grandeurs	**Nombre** d'ampoules et **prix** d'une ampoule
Une relation	2 ampoules coûtent 10 €.

A.2. Méthode de résolution

Pour résoudre un problème en utilisant la règle de trois, on procède en trois étapes :

Étape 1 : on écrit la relation entre les deux grandeurs.

Étape 2 : on ramène la relation à l'unité*.

Étape 3 : on calcule la valeur correspondant à la troisième donnée.

Exemple :
Un paquet de deux ampoules basse consommation coûte 10 euros. Combien coûtent neuf ampoules ?

$$\begin{tikzcd}
\text{Étape 1} & \text{2 ampoules} \arrow[r] \arrow[d, bend right, ":2"'] & 10\ € \arrow[d, bend left, ":2"] \\
\text{Étape 2} & \text{1 ampoule} \arrow[r] \arrow[d, bend right, "\cdot 9"'] & \dfrac{10\ €}{2} = 5\ € \arrow[d, bend left, "\cdot 9"] \\
\text{Étape 3} & \text{9 ampoules} \arrow[r] & 9 \cdot 5\ € = 45\ €
\end{tikzcd}$$

Solution 9 ampoules coûtent 45 €

***Attention:**
Le passage à l'unité n'est pas toujours indispensable. Au contraire, cela risque parfois de compliquer le calcul.

Exemple :
18 kg coûtent 10 €. Combien coûtent 27 kg?

$$\begin{tikzcd}
\text{18 kg} \arrow[r] \arrow[d, bend right, ":2"'] & 10\ € \arrow[d, bend left, ":2"] \\
\text{9 kg} \arrow[r] \arrow[d, bend right, "\cdot 3"'] & 5\ € \arrow[d, bend left, "\cdot 3"] \\
\text{27 kg} \arrow[r] & 15\ €
\end{tikzcd}$$

si passage à l'unité ...

$$\begin{tikzcd}
\text{18 kg} \arrow[r] \arrow[d, bend right, ":18"'] & 10\ € \arrow[d, bend left, ":18"] \\
\text{1 kg} \arrow[r] \arrow[d, bend right, "\cdot 27"'] & 0{,}555\ ...\ € \arrow[d, bend left, "\cdot 27"] \\
\text{27 kg} \arrow[r] & 14{,}999\ ...\ €
\end{tikzcd}$$

B. Les pourcentages

310-312 Cahier

B.1. Définition

Un **pourcentage** est une façon d'exprimer, en utilisant le symbole « % », un rapport entre deux nombres en le comparant à une fraction dont le dénominateur vaut 100.

Pour établir cette comparaison, on utilisera une règle de trois.

Exemple :
À quel pourcentage de 72 correspond 18 ?

1. $72 \longrightarrow 100$

2. $1 \longrightarrow \frac{100}{72}$

3. $18 \longrightarrow \frac{100}{72} \cdot 18 = 25$

Réponse : 18 représente les 25 % de 72.

B.2. Pour calculer le pourcentage d'un nombre

$20\ \%$ de $80 = \frac{20}{100} \cdot 80 = 16$

$20\ \%$ de $80 = (80 : 100) \cdot 20 = 16$

$20\ \%$ de $80 = 0{,}20 \cdot 80 = 16$

COMMENTAIRES

Les pourcentages sont utilisés dans des domaines variés tels que :

- **économie : taux d'intérêt, augmentation, variation…**
- **statistique : résultat d'un sondage…**
- **médical : concentration d'un médicament…**
- **physique : calcul d'erreur et d'incertitude…**

Dans certains domaines, notamment en technologie de haute précision, on utilisera 1000 ou 1 000 000 comme référence à la place de 100. On parlera alors de « pour mille (pm) » ou « partie par million (ppm) ».

B.3. Pour calculer une augmentation ou une diminution rapidement

- Une réduction de 20 % consiste à prendre les 80 % du tout.

  ⟶ On multiplie par 0,8.

Exemple :
Des soldes de 20 % sur un article de 50 €.
Au lieu de faire 20 % de 50 € = 10 €
Et ensuite 50 – 10 = 40 €
Il suffit de faire 80 % de 50 pour connaitre le prix à payer: 80 % de 50 = 40 €.

- Une augmentation de 5 % consiste à prendre les 105 % du tout.

  ⟶ On multiple par 1,05.

Lors d'une augmentation suivie d'une diminution identique de prix, il est tentant de considérer qu'il n'y a eu aucun effet. Mais en est-on certain ?

Exemple :
En décembre, un commerçant augmente de 20 % un prix de 50 €. En janvier, il pratique une réduction de 20 % sur le nouveau prix.

	Novembre	Décembre	Janvier
Prix de départ	50 €	50 €	60 €
Modification	//	20 % de 50 en plus	20 % de 60 en moins
Prix final	50 €	$1{,}20 \cdot 50$ € = 60 €	$0{,}80 \cdot 60 = 48$ €

La réduction par rapport au mois de novembre est de 2 € soit 4 %.

C. Les grandeurs proportionnelles

312-315 Cahier

C.1. Définition

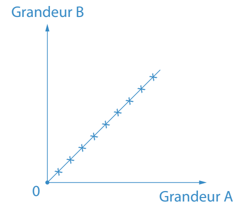
Deux grandeurs sont **proportionnelles** lorsque l'on peut obtenir les valeurs de l'une en multipliant les valeurs de l'autre par un même nombre appelé **coefficient de proportionnalité**.

Exemple

Grandeur A	2	3	4	6	10	12,2
Grandeur B	4	6	8	12	20	24,4

· 2

Les grandeurs A et B sont proportionnelles ; le coefficient de proportionnalité vaut 2.



Le graphique de deux grandeurs proportionnelles est une droite.

C.2. Propriétés du tableau de proportionnalité

- Si on **multiplie** une colonne par un même nombre, les nouvelles valeurs seront aussi proportionnelles.

· 3

Grandeur A	2	6
Grandeur B	4	12

· 2 · 2

· 3

- Si on **additionne** deux colonnes, les nouvelles valeurs seront aussi proportionnelles.

Grandeur A	2	3	5
Grandeur B	4	6	10

· 2

\+ =

Attention, on ne peut pas additionner ou soustraire un même nombre d'une ligne à l'autre.

– 2

Grandeur A	6	4
Grandeur B	12	10

– 2

Les grandeurs ne sont plus proportionnelles.

C.3. Quelques grandeurs proportionnelles

- ***Le calcul d'échelle***

Une **échelle** est le rapport entre la mesure d'une distance sur une carte ou un plan et sa mesure réelle.

Mesure plan	2 cm
Mesure réelle	2 km = 200 000 cm

· 100 000

$$\text{échelle} = \frac{\text{longueur sur le plan}}{\text{longueur réelle}}$$

L'échelle sera **1 : 100 000** ou $\mathbf{\frac{1}{100\,000}}$

Dans un calcul d'échelle, les deux mesures sont exprimées dans la même unité.

Si la mesure plan est supérieure à la mesure réelle, on parlera d'**agrandissement**. Dans le cas contraire, on parlera de **réduction**.

- ***Le calcul de vitesse***

La **vitesse moyenne** d'un mobile est le rapport entre la distance parcourue et le temps de parcours.

Temps de parcours (t)	2 h
Distance parcourue (d)	10 km

· vitesse moyenne (v = 5km/h)

Cette relation s'écrit aussi : $v = \frac{d}{t}$ ou $d = v \cdot t$

3. CARTE DU CHAPITRE

- Des nombres qui s'harmonisent
  - La règle de trois
    - Définition
      - 3 nombres
      - 2 grandeurs
      - 1 relation
    - Résolution
  - Les pourcentages
    - Définition
    - Calculs
  - Les grandeurs proportionnelles
    - Définition
    - Tableau
    - Exemples
      - Échelle
      - Vitesse

4. AI-JE BIEN COMPRIS ?

Vrai ou faux ? Justifie ta réponse.

a) Pour pouvoir appliquer une règle de trois, mon problème doit contenir trois grandeurs.

b) On peut additionner deux pourcentages : 5 % + 5 % = 10 %.

c) Si deux grandeurs sont proportionnelles, je peux les additionner pour en obtenir une troisième qui sera proportionnelle aux deux premières.

d) Diminuer de 20 % un nombre revient à prendre les 80 %.

D'autres rubriques dans le cahier:

Travaille tes compétences — 317 Cahier

Préparer ton évaluation — 320 Cahier

Mathématiques sans frontières — 319 Cahier

Exercices supplémentaires — 321-322 Cahier

Nombres | Géométrie | Grandeurs | Traitement de données

La petite gazette

À quoi servent les maths ?

▸ Si les mathématiques jouent un rôle important dans les grandes découvertes scientifiques, comme la découverte du boson de Higgs avec 99,99999 % en juillet 2012, qu'en est-il de son usage au quotidien ?

Sans parfois le savoir, tout le monde utilise les mathématiques au quotidien. Un peu comme quand on respire : on ne s'en rend pas compte, mais c'est automatique.

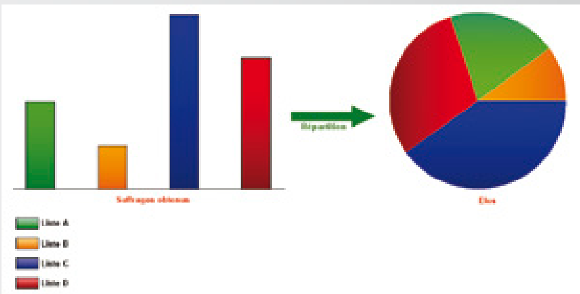
Ainsi :

- ta grand-mère utilise les grandeurs proportionnelles quand elle prépare une recette pour 10 personnes ;
- tes parents calculent avec des nombres entiers quand ils planifient un budget mensuel ;
- ta petite sœur découvre les nombres quand elle joue au jeu de l'oie ;
- ton grand frère recherche des symétries quand il construit une voiture télécommandée.

Quand « politique » rime avec « mathématique »

▸ Lors des périodes électorales, une question revient régulièrement à la une de l'actualité : doit-on continuer le système proportionnel ou doit-on passer à une élection majoritaire ?

▸ Dans un *scrutin proportionnel*, le nombre d'élus de chaque parti est déterminé proportionnellement en fonction du nombre de sièges à attribuer. Par exemple, si quatre partis obtiennent respectivement 42 %, 31 %, 15 % et 12 % des voix, le nombre de sièges attribués sur un total de 6 sera : 3, 2, 1 et 0.
Par contre, dans un *scrutin majoritaire*, le candidat qui obtient la majorité remporte le siège. Ainsi, en reprenant les scores des partis ci-dessus, le nombre de sièges respectifs pourrait être 4, 2, 0 et 0.



Exemple de répartition proportionnelle

▸ Mais de toute façon, quel que soit le type de scrutin, le candidat gagnant sera toujours content et le perdant critiquera le système…

Récompenses mathématiques

As-tu déjà constaté qu'il n'existe pas de prix Nobel de mathématiques ? La légende raconte qu'Alfred Nobel n'aurait pas créé de prix de mathématiques par jalousie. Sa femme aurait aimé secrètement un jeune mathématicien suédois. Mais ce n'est qu'une légende car Alfred Nobel n'a jamais été marié…

Toutefois, il existe deux grands prix internationaux récompensant les brillants mathématiciens :

- La médaille Fields (du nom de son créateur John Charles Fields) récompense des mathématiciens de moins de 40 ans qui ont apporté une contribution importante dans un domaine particulier. Deux Belges l'ont obtenue : Pierre Deligne en 1978 et Jean Bourgain en 1994.
- Le prix Abel (en référence au mathématicien norvégien Niels Abel) récompense l'ensemble de la carrière exceptionnelle d'un mathématicien. Un Belge a obtenu le prix en 2008, il s'agit de Jacques Tits.

Médaille Fields