

# Chapitre 4

## Trigonométrie dans le triangle rectangle

### Matières abordées

UAA2

Prérequis

1. Nombres trigonométriques d'un angle aigu
2. Résolution de triangles
3. Problèmes trigonométriques
4. Pente et inclinaison
5. Nombres trigonométriques particuliers
6. Relation entre les nombres trigonométriques et formule fondamentale



### Objectifs

Je serai capable de ...

#### CONNAITRE

- ☐ Définir sinus, cosinus et tangente d'un angle dans le triangle rectangle.
- ☐ Établir les nombres trigonométriques dans des triangles rectangles particuliers ( $30^\circ$ ,  $45^\circ$  et  $60^\circ$ ).
- ☐ Démontrer la formule fondamentale.
- ☐ Démontrer la relation entre les nombres trigonométriques.

#### APPLIQUER

- ☐ Utiliser les nombres trigonométriques d'un angle dans un triangle rectangle dans des calculs.
- ☐ Calculer la pente et l'inclinaison et l'exprimer en pourcents.

#### TRANSFÉRER

- ☐ Résoudre un problème (calcul d'une longueur, calcul d'un angle, construction) en utilisant les nombres trigonométriques.

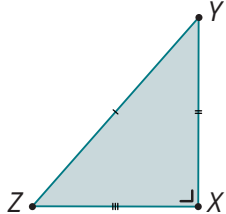
# Prérequis



L'échauffement, c'est essentiel !

Revoyons quelques notions avant d'aborder le chapitre.

Trouve la ou les bonne(s) réponse(s).

Trouve la ou les bonne(s) réponse(s).			A	B	C	D	
1	<div>Soit le triangle XYZ</div> 	a	Quelle est la nature du triangle ?	Isocèle	Rectangle	Obtusangle	Équilatéral
		b	Dans le triangle XYZ : [YZ] est ...	Le côté oblique	Le long côté	L'hypoténuse	Le côté droit
		c	Dans le triangle XYZ :	$ XZ ^2 +  XY ^2 =  YZ ^2$	$ XY  +  YZ  =  XZ $	$ YZ ^2 +  XZ ^2 =  XY ^2$	$ XZ  +  XY  =  YZ $
		d	[XY] est le côté ... à l'angle $\hat{Y}$	opposé	adjacent	correspondant	complémentaire
		e	[XY] est le côté ... à l'angle $\hat{Z}$	opposé	adjacent	correspondant	complémentaire
2	Quelle relation existe-t-il entre les amplitudes des angles de tout triangle ?		Les angles sont supplémentaires	La somme de deux amplitudes vaut $90^\circ$	La somme des amplitudes vaut $360^\circ$	La somme des amplitudes vaut $180^\circ$	
3	Pour augmenter la valeur d'une fraction $\frac{a}{b}$ , il faut ...		augmenter le numérateur $a$	augmenter le dénominateur $b$	augmenter le numérateur $a$ et le dénominateur $b$	diminuer le dénominateur $b$	
4	Pour diminuer la valeur d'une fraction $\frac{a}{b}$ , il faut ...		augmenter le numérateur $a$	augmenter le dénominateur $b$	diminuer le numérateur $a$ et le dénominateur $b$	diminuer le dénominateur $b$	
5	$\frac{16}{5} =$		80 %	32 %	320 %	31,25 %	
6	$\frac{3}{x} = 7 \Leftrightarrow x =$		7	3	$\frac{7}{3}$	$\frac{3}{7}$	



Tu rencontres des difficultés à résoudre ces exercices ? Tu trouveras sur Scoodle des rappels de cette matière et des exercices interactifs.

# 1 Nombres trigonométriques d'un angle aigu



## 1. Exploration



Dans tout ce chapitre, tu devras utiliser ta calculatrice, nous ne le préciserons pas à chaque fois...

Pour monter en haut de la tour Eiffel, il y a deux escaliers. Si on les imagine différents, le premier, l'escalier Nord, a des marches de 25 cm et des contremarches de 15 cm et le deuxième, l'escalier Sud, a des marches de 30 cm et des contremarches de 20 cm. Compare les deux escaliers en observant la pente qu'ils forment avec le sol.

Pour ce faire, schématise les escaliers en indiquant la distance horizontale parcourue et la hauteur totale, et ce, après 1, 2, 3... marches.

Quelle est la nature des triangles que tu as construits ?

Petit conseil : utilise l'échelle 1/10.



À présent, nous allons observer les rapports entre les côtés de ces triangles.



Un rapport est un mode de comparaison entre deux grandeurs de même nature. C'est le quotient de la division du premier nombre par le deuxième. On l'exprime sous forme d'un nombre, d'une fraction ou d'un pourcentage.



### TANGENTE

a) Calcule le rapport entre contremarche et marche après 1, 2, 3... marches :

Pour l'escalier Nord :



Nombre de marches	Hauteur	Distance horizontale	$\frac{\text{Hauteur}}{\text{Distance horizontale}}$
1	15	25	?
2	30	50	?
3	45	75	?
4	60	100	?
5	75	125	?

Pour l'escalier Sud :

Nombre de marches	Hauteur	Distance horizontale	$\frac{\text{Hauteur}}{\text{Distance horizontale}}$
1	20	30	?
2	40	60	?
3	60	90	?
4	80	120	?
5	100	150	?

b) Que peux-tu dire à propos de ce rapport  $\frac{\text{Hauteur}}{\text{Distance horizontale}}$  ?

c) De quel angle du triangle dépend-il ?



Ce rapport te donne une bonne indication de la pente de l'escalier. Plus l'escalier sera raide, plus l'amplitude de l'angle entre l'escalier et le sol sera grande, plus le rapport sera grand.

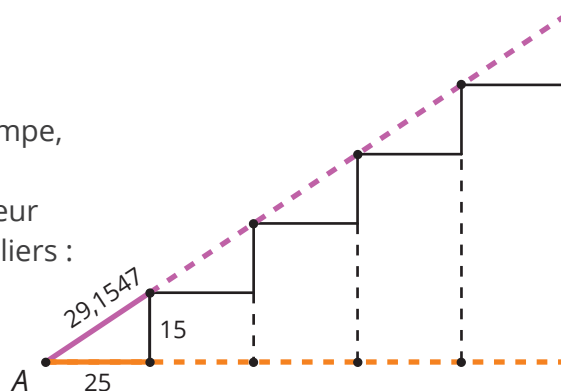
d) Quelles valeurs ce rapport peut-il prendre ?



### COSINUS

Les deux escaliers possèdent également une rampe, placée parallèlement à l'escalier.

Calcule le rapport entre les marches et la longueur de la rampe correspondante pour les deux escaliers :



Pour l'escalier Nord :

Nombre de marches	Distance horizontale	Longueur de la rampe (par Pythagore)	$\frac{\text{Distance horizontale}}{\text{Longueur de la rampe}}$
1	25	$\sqrt{25^2 + 15^2} \approx 29,1548$	?
2	50	$\sqrt{50^2 + 30^2} \approx 58,3095$	?
3	75	$\sqrt{75^2 + 45^2} \approx 87,4643$	?
4	100	$\sqrt{100^2 + 60^2} \approx 116,6190$	?
5	125	$\sqrt{125^2 + 75^2} \approx 145,7738$	?

Pour l'escalier Sud :

Nombre de marches	Distance horizontale	Longueur de la rampe (par Pythagore)	$\frac{\text{Distance horizontale}}{\text{Longueur de la rampe}}$
1	30	$\sqrt{30^2 + 20^2} \approx 36,0555$	?
2	60	$\sqrt{60^2 + 40^2} \approx 72,1110$	?
3	90	$\sqrt{90^2 + 60^2} \approx 108,1665$	?
4	120	$\sqrt{120^2 + 80^2} \approx 144,2221$	?
5	150	$\sqrt{150^2 + 100^2} \approx 180,2776$	?

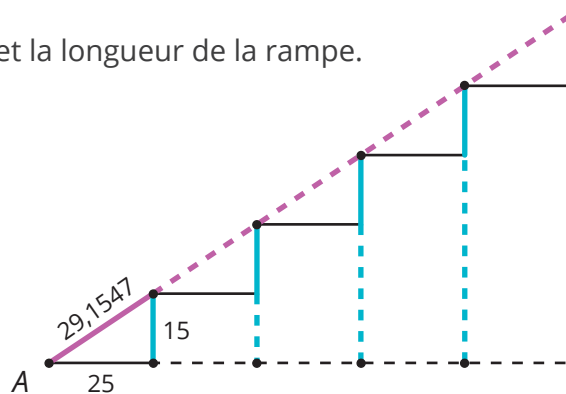
a) Que peux-tu dire à propos de ce rapport ?

b) À quelle condition ce rapport augmentera / diminuera-t-il ?

c) Quelles valeurs ce rapport peut-il prendre ?



Fais de même pour le rapport entre la hauteur et la longueur de la rampe.



Pour l'escalier Nord :

Nombre de marches	Hauteur	Longueur de la rampe	$\frac{\text{Hauteur}}{\text{Longueur de la rampe}}$
1	15	$\sqrt{25^2 + 15^2} \approx 29,1548$	?
2	30	$\sqrt{50^2 + 30^2} \approx 58,3095$	?
3	45	$\sqrt{75^2 + 45^2} \approx 87,4643$	?
4	60	$\sqrt{100^2 + 60^2} \approx 116,6190$	?
5	75	$\sqrt{125^2 + 75^2} \approx 145,7738$	?

Pour l'escalier Sud :

Nombre de marches	Hauteur	Longueur de la rampe	$\frac{\text{Hauteur}}{\text{Longueur de la rampe}}$
1	20	$\sqrt{30^2 + 20^2} \approx 36,0555$	?
2	40	$\sqrt{60^2 + 40^2} \approx 72,1110$	?
3	60	$\sqrt{90^2 + 60^2} \approx 108,1665$	?
4	80	$\sqrt{120^2 + 80^2} \approx 144,2221$	?
5	90	$\sqrt{150^2 + 100^2} \approx 180,2776$	?

a) Que peux-tu dire sur ce rapport ?

b) À quelle condition ce rapport augmentera / diminuera ?



Tu viens de découvrir que dans un triangle rectangle, pour un angle aigu donné, les rapports entre les mesures des côtés sont toujours les mêmes (quelles que soient les mesures de ce triangle). On les appelle sinus, cosinus et tangente d'un angle.

Ceci te permettra de calculer la longueur d'un côté quand une amplitude d'angle et une longueur de côté sont données, mais inversement, tu pourras également calculer une amplitude d'angle quand les longueurs de deux côtés sont données. Pour cela, tu auras besoin de ta calculatrice.

Que se passe-t-il quand on augmente la mesure des marches ? Et quand on augmente la mesure des contremarches ?



Attention ! Sinus, cosinus et tangente sont des rapports de longueurs, ils n'ont donc pas d'unité !

D'ailleurs, pour l'escalier Nord, on a :  $\tan \hat{A} = \frac{15 \text{ cm}}{25 \text{ cm}} = \frac{3 \text{ cm}}{5 \text{ cm}} = \frac{3}{5}$



## 2. Synthèse

a) Recopie et complète la synthèse suivante :

Indique les côtés adjacents et opposés à l'angle  $\hat{A}$ . Le troisième côté est l'hypoténuse. Dans le triangle  $ABC$ , rectangle en  $B$ , on définit le sinus, cosinus et la tangente de l'angle  $\hat{A}$  comme suit :

? est le côté opposé à l'angle  $\hat{A}$  et ? est le côté adjacent à l'angle  $\hat{A}$ .

$$\sin \hat{A} = ?$$

$$\cos \hat{A} = ?$$

$$\tan \hat{A} = ?$$

Fais de même pour l'angle  $\hat{C}$ .

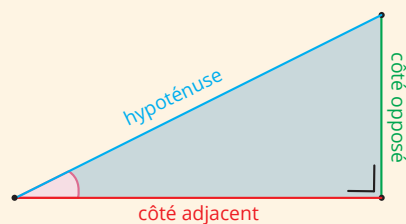
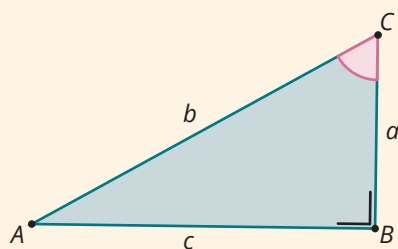
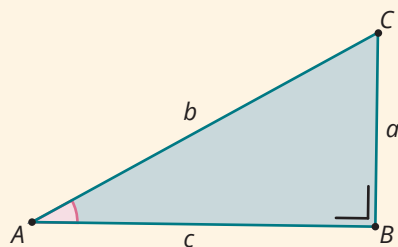
? est le côté opposé à l'angle  $\hat{C}$  et ? est le côté adjacent à l'angle  $\hat{C}$ .

$$\sin \hat{C} = ?$$

$$\cos \hat{C} = ?$$

$$\tan \hat{C} = ?$$

b) Donne une définition générale en langage mathématique du **sinus**, **cosinus** et de la **tangente** d'un angle.



Tu connais certainement le célèbre « Haka » des All Blacks, l'équipe nationale de rugby de Nouvelle-Zélande.

Pour la trigonométrie, on a également inventé un célèbre cri !

« SOH - CAH - TOA ». Cela pourra certainement t'aider à retenir ces formules.

En trigonométrie, tu as besoin de ta calculatrice. Comment l'utilises-tu ?

- Passer en mode « degrés ».
- Calculer les nombres trigonométriques avec les touches  $\sin$ ,  $\cos$  et  $\tan$
- Pour calculer une amplitude d'angle quand on connaît un nombre trigonométrique, on utilise les touches  $\sin^{-1}$ ,  $\cos^{-1}$  et  $\tan^{-1}$ .

Sur certaines calculatrices, tu trouveras plutôt  $\text{Arcsin}$ ,  $\text{Arccos}$  et  $\text{Arctan}$ .

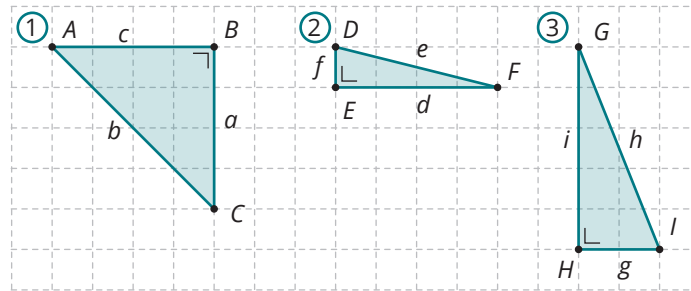




### 3. Applications

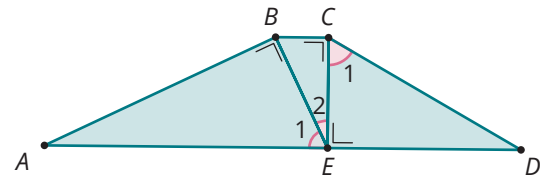


- 1** Voici trois triangles rectangles. Exprime les rapports sinus, cosinus et tangente pour chacun des angles aigus de ces trois triangles.

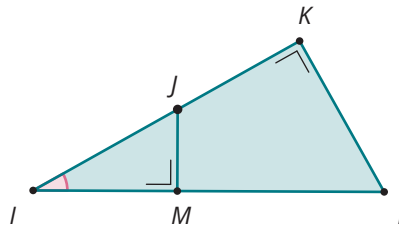


- 2** Complète.

$\sin \hat{E}_1 = ?$	$\cos \hat{E}_1 = ?$	$\tan \hat{E}_1 = ?$
$\sin \hat{E}_2 = ?$	$\cos \hat{E}_2 = ?$	$\tan \hat{E}_2 = ?$
$\sin \hat{C}_1 = ?$	$\cos \hat{C}_1 = ?$	$\tan \hat{C}_1 = ?$



- 3** Exprime  $\sin \hat{I}$ ,  $\cos \hat{I}$  et  $\tan \hat{I}$  chaque fois de deux manières différentes.

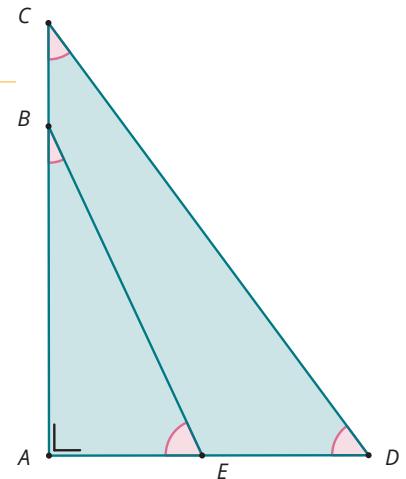


- 4** Construis les angles dont les nombres trigonométriques suivants sont donnés :

a) $\cos \hat{A} = \frac{2}{3}$	c) $\tan \hat{C} = \frac{1}{2}$	e) $\cos \hat{E} = \frac{7}{6}$
b) $\sin \hat{B} = \frac{3}{4}$	d) $\sin \hat{D} = \frac{3}{5}$	f) $\tan \hat{F} = \frac{8}{5}$

- 5** Complète si tu sais que  $|\hat{A}| = 90^\circ$ .

$\sin \hat{E} = ?$	$? = \frac{ AB }{ BE }$
$\cos \hat{D} = ?$	$? = \frac{ AB }{ AE }$
$\sin \hat{C} = ?$	$? = \frac{ AC }{ CD }$
$\tan \hat{B} = ?$	$? = \frac{ AD }{ AC }$



- 6** On donne : un triangle  $GEF$ , rectangle en  $E$  et  $|GE| = |EF|$ .

Calcule  $\tan \hat{G}$  et  $\tan \hat{F}$  sans calculatrice.  
Tires-en une propriété.

# Partie 2 Résolution de triangles

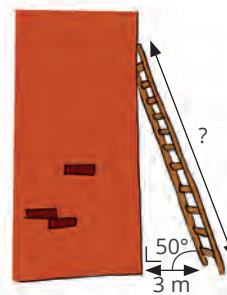


## 1. Exploration

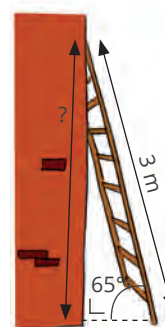


Dans les situations suivantes, trouve la réponse en utilisant les définitions des nombres trigonométriques. Schématise chaque situation et annote avec les données et l'inconnue :

- 1) Le pied d'une échelle est placé à 3 m d'un mur et forme un angle de  $50^\circ$  avec le sol.  
Quelle est la longueur de l'échelle ?



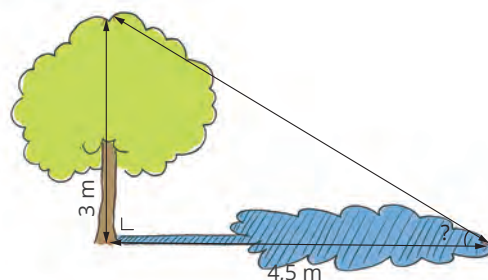
- 2) Une autre échelle, mesurant 3 m, est placée de manière à former un angle de  $65^\circ$  avec le sol.  
Quelle hauteur atteindra-t-elle sur le mur ?



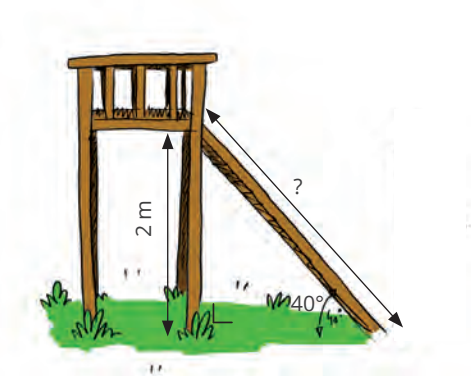
- 3) Pour la cueillette, on place une échelle de 2 m de long contre un arbre. L'échelle forme avec le sol un angle de  $62^\circ$ . À quelle distance de l'arbre le pied de l'échelle est-il placé ?



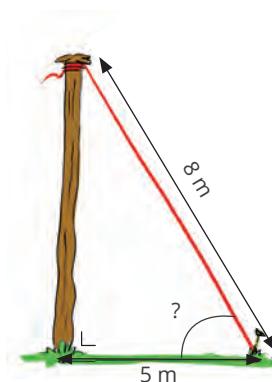
- 4) Un arbre de 3 m de haut forme une ombre de 4,5 m de long sur le sol.  
Quelle est l'amplitude de l'angle formé par les rayons du soleil avec le sol ?



- 5) Un toboggan est placé à 2 m de hauteur et forme un angle de  $40^\circ$  avec le sol. Quelle est sa longueur ?



- 6) Un poteau est fixé au sol par un câble de 8 m de long à une distance de 5 m du poteau. Quelle est l'amplitude de l'angle formé par le câble avec le sol ?



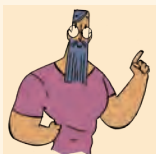
- 7) L'extrémité d'un chapiteau est située à une hauteur de 12 m et est fixée par un câble de 22 m de long au sol. Quelle est l'amplitude de l'angle formé par le câble et le sol ?





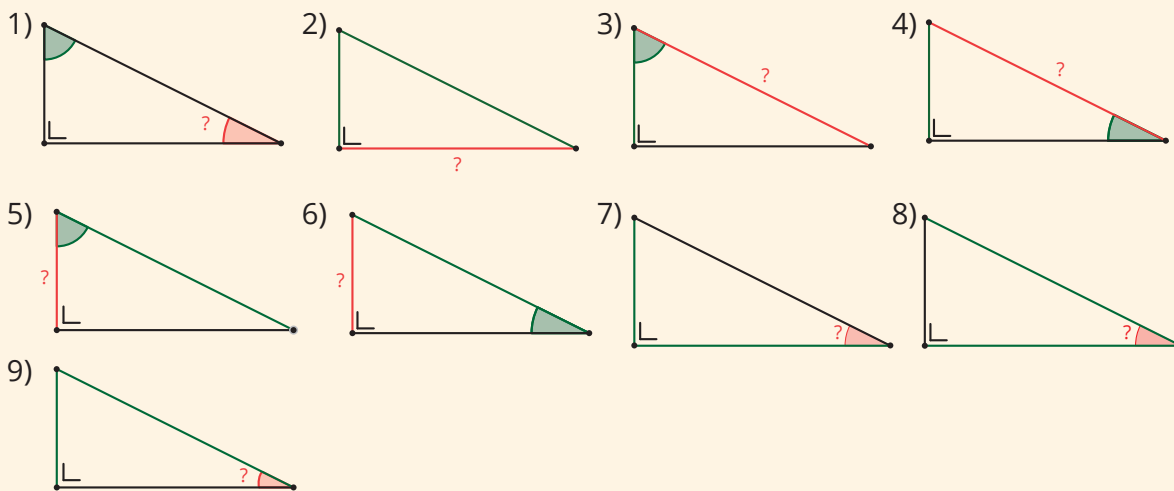
## 2. Synthèse

Dans un triangle rectangle :



Afin de se simplifier la vie, on utilisera les termes « côté adjacent », « côté opposé » et « hypoténuse » pour définir la mesure de la longueur de ceux-ci.

	On donne	On cherche	On utilise
1	un angle aigu	un angle aigu	?
2	deux côtés	un côté	?
3	un angle aigu, côté adjacent	hypoténuse	?
4	un angle aigu, côté opposé	hypoténuse	?
5	un angle aigu, hypoténuse	côté adjacent	?
6	un angle aigu, hypoténuse	côté opposé	?
7	côté adjacent, côté opposé	angle aigu	?
8	côté adjacent, hypoténuse	angle aigu	?
9	côté opposé, hypoténuse	angle aigu	?

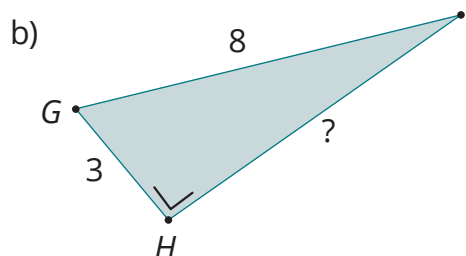
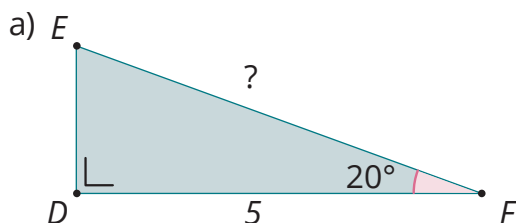


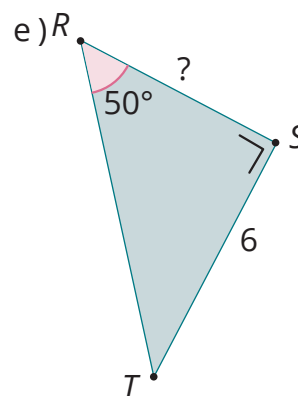
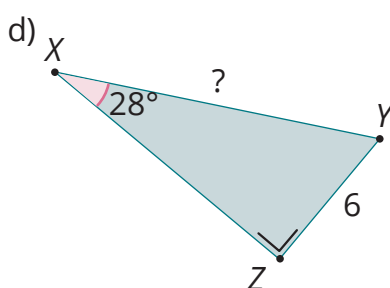
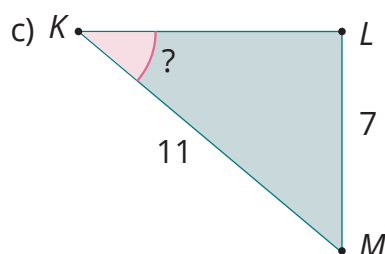
## 3. Applications



1

Détermine la mesure demandée.





2

Construis un triangle  $ECD$ , rectangle en  $C$ , tel que  $|CE| = 8$  et  $|CD| = 6$ .

- Calcule la valeur exacte de l'hypoténuse.
- Calcule la mesure des angles (le résultat sera arrondi à l'unité).
- Compare  $\cos \hat{D}$  et  $\sin \hat{E}$  ;  $\sin \hat{D}$  et  $\cos \hat{E}$ .
- Le triangle  $ECD$  est rectangle en  $C$ . Que peux-tu dire des angles  $\hat{D}$  et  $\hat{E}$  ?
- Quelles conclusions peux-tu tirer des deux dernières lignes ?

3

Complète le tableau et détermine au centième près les valeurs des sinus, cosinus et tangente et à l'unité l'amplitude des angles.

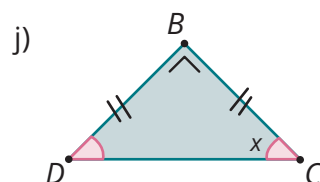
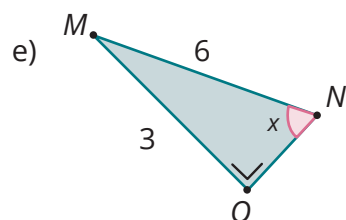
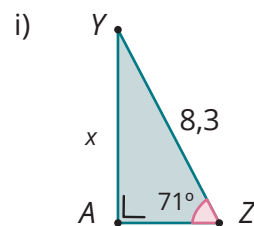
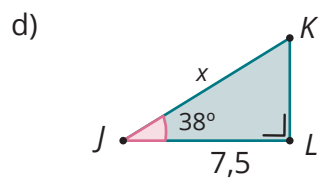
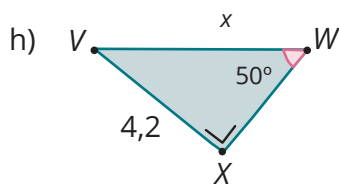
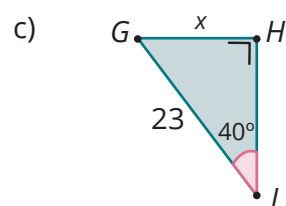
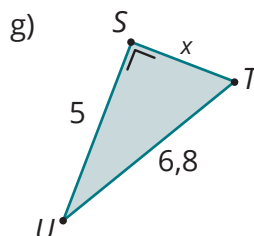
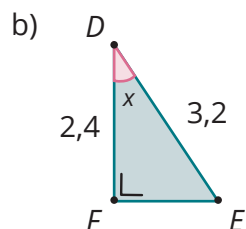
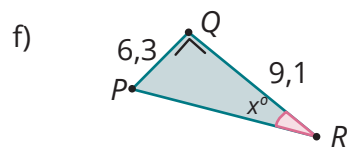
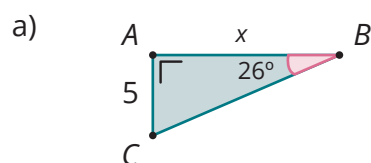


	Amplitude de l'angle	Sinus	Cosinus	Tangente
a)	$25^\circ$	?	?	?
b)	$50^\circ$	?	?	?
c)	$30^\circ$	?	?	?
d)	?	0,4	?	?
e)	?	?	?	1,25
f)	?	?	0,73	?
g)	?	?	1,24	?
h)	?	?	?	2,24
i)	?	1,75	?	?
j)	$89^\circ$	?	?	?

Certains calculs sont impossibles. Pourquoi ?

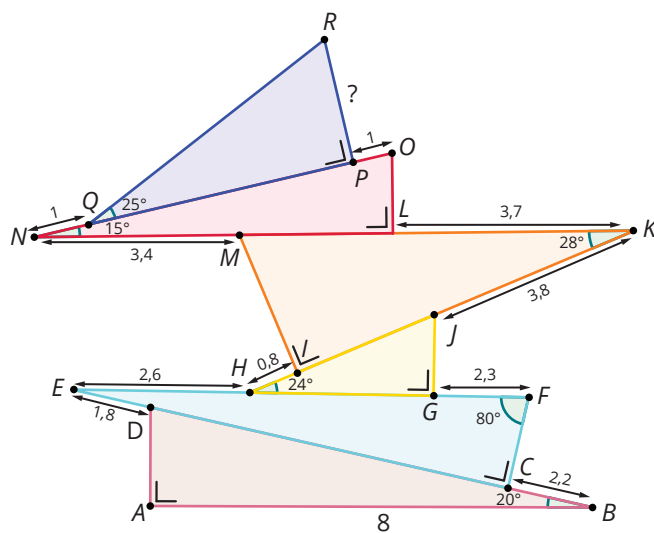
4

Calcule la valeur de  $x$ . Arrondis au dixième près.



5

Calcule  $|PR|$ .



# Partie 3 Problèmes trigonométriques



## 1. Exploration

Un troupeau de zèbres migre vers une autre région de la savane pour trouver de la nourriture et doit pour cela traverser une rivière agitée. La rivière mesure 40 m de large. Tous les animaux du troupeau prennent le départ au même endroit. Une partie du troupeau parcourt une distance de 50 m pour traverser la rivière, se laissant emporter par le courant. Une autre partie du troupeau se laisse encore plus emporter par le courant et arrive de l'autre côté de la rivière 20 m plus loin que le premier troupeau.



Quelle est l'amplitude de l'angle formé par la traversée la plus courte et la traversée du deuxième troupeau ?

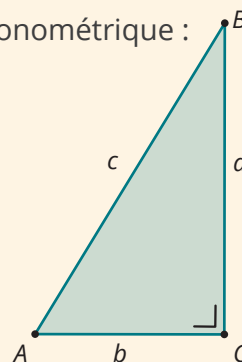
Réalise un schéma. Nomme les points importants et indique les données.



## 2. Synthèse

Explique les étapes à suivre pour résoudre un problème trigonométrique :

- Schéma : ?
- On donne, on demande, on recherche : ?
- Réponse : ?



Complète le tableau avec les formules des nombres trigonométriques et les formules que tu peux en déduire pour les longueurs des côtés :

$\hat{A}$	Sinus	?	?	?
	Cosinus	?	?	?
	Tangente	?	?	?
$\hat{B}$	Sinus	?	?	?
	Cosinus	?	?	?
	Tangente	?	?	?
Théorème de Pythagore		?		

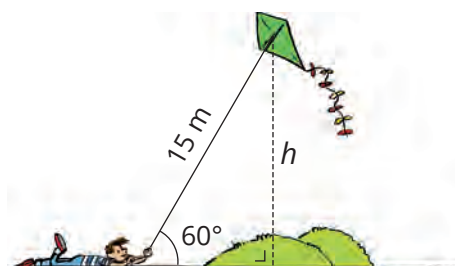


### 3. Applications



1

À quelle hauteur se situe le cerf-volant ?



2

Quelle est la longueur de l'ombre d'un lampadaire de 4 m de haut sachant que les rayons du soleil forment un angle d'amplitude  $40^\circ$  avec l'horizon ? Arrondis ta réponse au cm près.

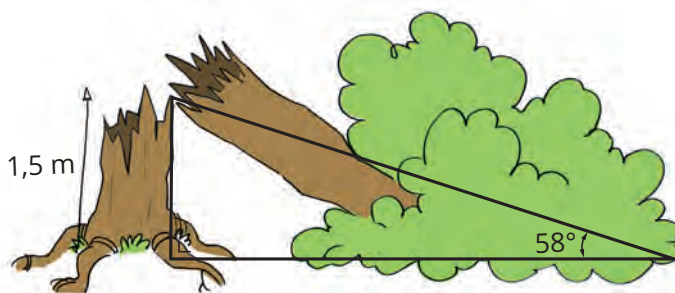
3

Quelle est l'amplitude de l'angle qui forme la pente de cette piste de ski ?



4

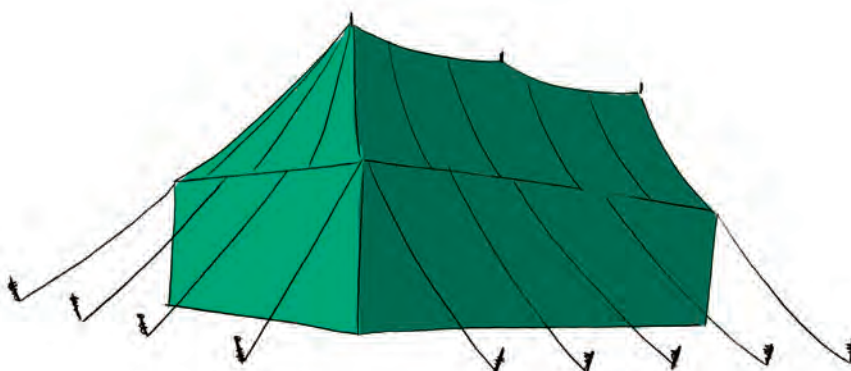
La foudre a frappé un arbre au niveau du tronc à 1,5 m du sol. La partie cassée forme un angle de  $58^\circ$  avec le sol. Quelle était la hauteur de l'arbre avant que la foudre ne s'abatte sur lui ?



5

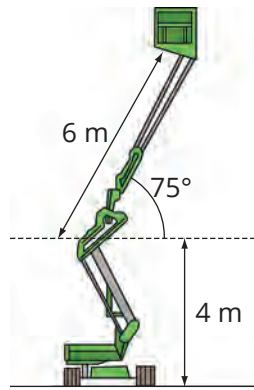
Les tendeurs d'un chapiteau mesurent chacun 3 m de long et forment avec le sol un angle de  $54^\circ$ .

À quelle distance du chapiteau doit-on les fixer dans le sol ?



6

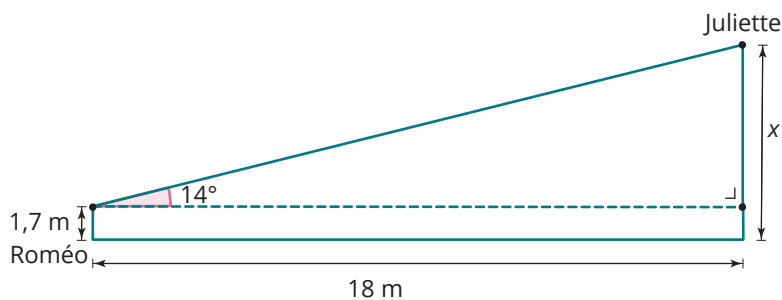
Quelle est la hauteur de la nacelle ?



7

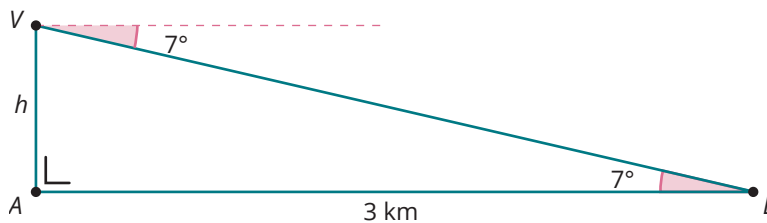
Roméo se situe à 18 m de la maison de Juliette. Il aperçoit le rebord du balcon sur lequel se trouve sa belle sous un angle de  $14^\circ$ .

Sachant que ses yeux se situent à 1,7 m du sol, à quelle hauteur se situe le balcon ?



8

Un avion entame sa descente sous un angle de  $7^\circ$  avec l'horizontale et conserve cet angle tout au long de l'atterrissage. Il parcourt une distance horizontale de 3 km avant d'atterrir. À quelle hauteur se situait-il au moment où il entamait sa descente ?



9

Lors du dernier film d'action de Jason Statham, celui-ci se laisse glisser du haut d'un bâtiment de 65 m jusqu'au sol par un câble en acier. Ce câble est fixé au sol en formant un angle de  $32^\circ$ . Quelle en est sa longueur ?



10

Le mât d'un drapeau a une hauteur de 3 m. Sous quel angle avec l'horizontale le soleil brille-t-il si tu sais que l'ombre du mât mesure 2,6 m ?

1  
2

3

4  
5  
6

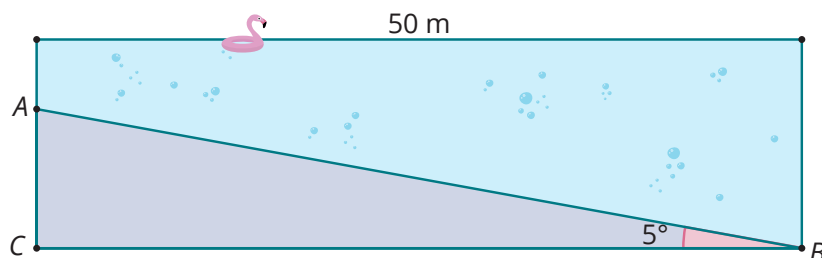
11



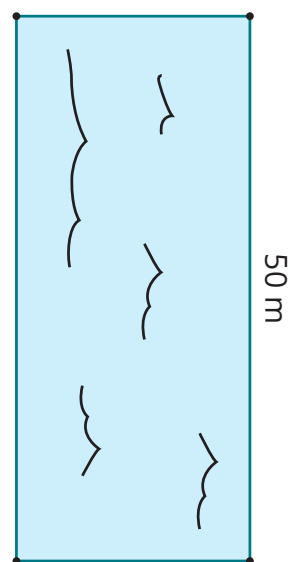
La piscine communale a été vidée. Celle-ci a une longueur de 50 m et une largeur de 10 m. D'une extrémité à l'autre, la profondeur augmente sous un angle de  $5^\circ$ . Le personnel doit nettoyer le fond de la piscine.

Quelle surface cela représente-t-il ?

Vue latérale de la piscine :



Vue du dessus :  
10 m

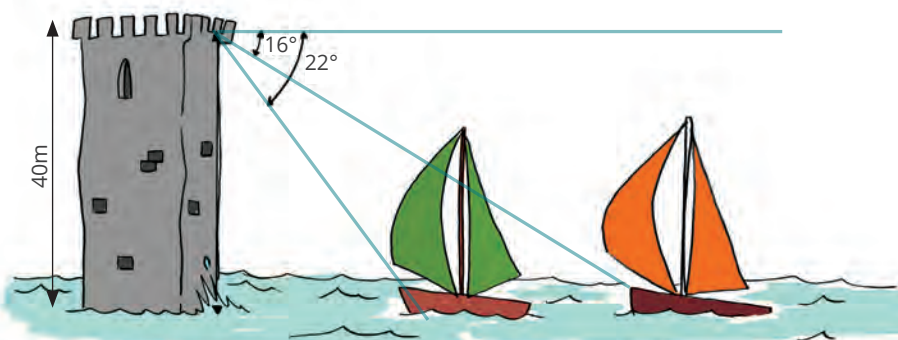


12



Quand on se trouve en haut d'un phare de 40 m de hauteur, on peut voir deux bateaux alignés. L'un sous un angle de  $22^\circ$  avec l'horizontale, l'autre, plus loin, sous un angle de  $16^\circ$  avec l'horizontale.

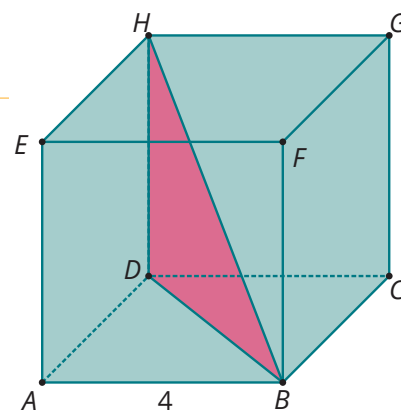
Calcule la distance entre la proue (l'avant) du premier bateau et celle du second bateau. Établis un schéma de cette situation dans lequel tu indiquerai des lettres pour les différents points.



13

Soit un cube  $ABCDEFGH$  de côté 4.

- Calcule  $|BD|$ .
- Calcule  $|BH|$ .
- Calcule les amplitudes des angles du triangle  $BDH$ .

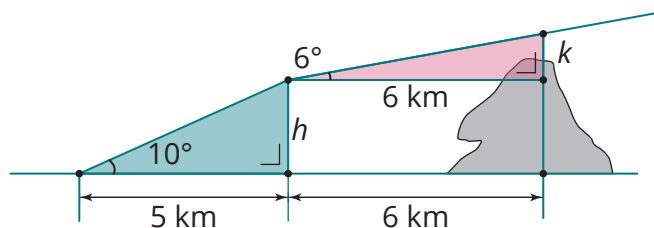


14



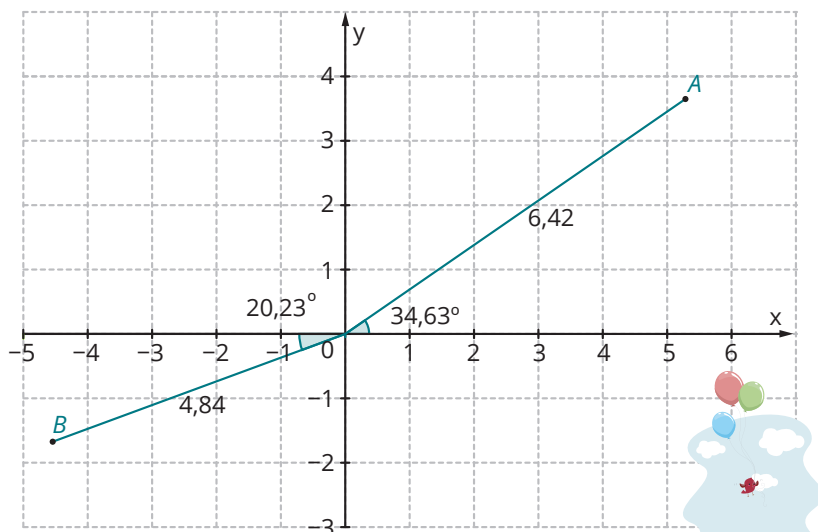
Un avion s'envole sous un angle de  $10^\circ$  avec le sol. Au bout de 5 km, il rectifie son angle pour monter sous un angle de  $6^\circ$  avec l'horizontale. À 11 km du point de départ se trouve une montagne dont le point le plus haut se situe à 1 500 m d'altitude.

L'avion survolera-t-il la montagne ou devra-t-il changer son orientation ?



15

Quelles sont les coordonnées des points A et B ?

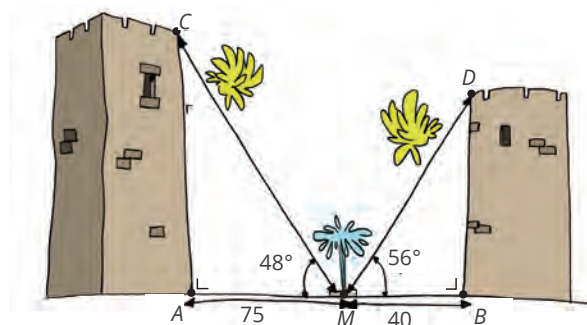


16

Depuis le point M, situé au milieu de la fontaine entre deux tours, on voit une tour sous un angle d'une amplitude de  $48^\circ$  avec l'horizontale et l'autre tour sous un angle d'une amplitude de  $56^\circ$  avec l'horizontale. Un oiseau vole d'une tour à l'autre en passant par le point M (C - M - D).



Quelle distance supplémentaire parcourt-il par rapport à un vol « direct » d'une tour à l'autre (C - D) ?



17

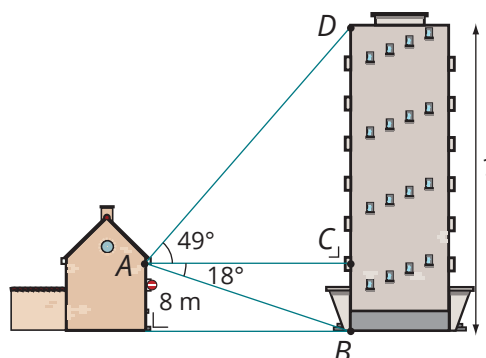
Un microscope fonctionne grâce à une source de lumière sous une vitre transparente. Cette source, qu'on peut considérer comme un point, projette un disque de lumière sur la vitre. Pour analyser une culture bactérienne, on a besoin d'un disque de 10 cm de diamètre. L'angle de propagation de la lumière est de  $120^\circ$ .



À quelle distance de la source de lumière faut-il placer la vitre ?

18

Victor veut déterminer la hauteur du bâtiment en face de son habitation. Sur le dessin ci-dessous, tu trouveras quelques mesures qu'il a effectuées depuis sa chambre située au point A. Calcule la hauteur du bâtiment.



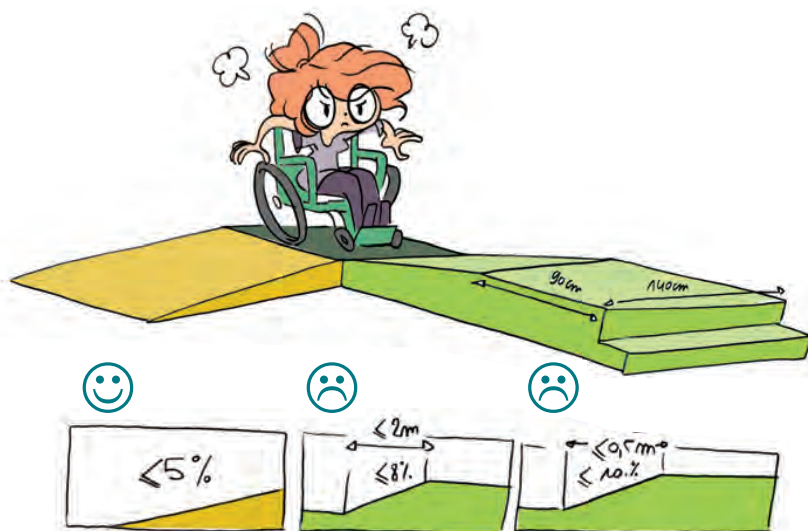
# Partie 4 Pente et inclinaison



## 1. Exploration

### ► Exploration n°1

La rampe d'accès



Depuis janvier 2015, tous les établissements recevant du public doivent être accessibles à tous, et donc aussi aux personnes circulant en fauteuil roulant.

Ces personnes ont besoin d'une rampe d'accès à l'endroit où il y a des marches. Pour la pente de la rampe, une pente de 5 % est conseillée. Une pente de 8 % est tolérée sur une distance horizontale maximale de 2 m et une pente de 10 % est tolérée pour une distance horizontale maximale de 0,5 m.

a) En t'aidant du dessin, schématise les 3 normes et indique l'angle qui détermine cette pente.

b) Pour obtenir ce pourcentage, on a utilisé le rapport entre la distance horizontale et la distance verticale parcourue. À quel nombre trigonométrique de l'angle que tu as indiqué cela correspond-il ? Exprime-le pour les triangles que tu as tracés.

c) À quels angles ces trois normes correspondent-elles ?

d) Dès lors, peux-tu dire qu'une **pente** de 100 % signifie que la rampe est placée à la verticale ?



### ► Exploration n°2

Le tapis roulant



Jérémy court plusieurs fois par semaine sur un tapis roulant. Après quelques séances, il décide d'augmenter la difficulté. Pour ce faire, il utilise le bouton « inclinaison » sur le tapis. Là, il doit choisir un pourcentage. Son coach lui dit qu'une inclinaison de 5 % est déjà pas mal pour commencer.

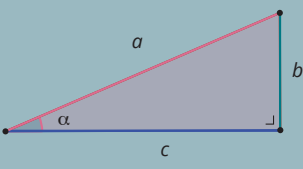
Quand il introduit 5 % sur la machine, l'avant du tapis s'élève jusqu'à 10 cm au-dessus du sol. Ensuite, Jérémy décide de passer à une inclinaison de 12 %.

- Schématise les deux situations sachant que la longueur du tapis est de 2 m. Indique l'angle qui détermine l'inclinaison.
- À quel nombre trigonométrique correspond cette **inclinaison** ?
- À quelles amplitudes d'angles ces pourcentages correspondent-ils ?

## 2. Synthèse



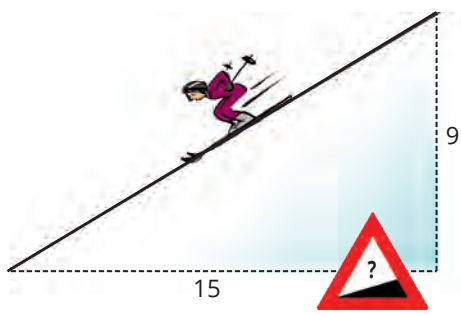
Dresse un tableau comparatif de la pente et l'inclinaison de l'angle  $\alpha$ .

	Différence	Similitude
Pente	?	?
Inclinaison	?	

## 3. Applications



- 1 Calcule la pente de cette piste de ski.



- 2 Le parc d'attractions

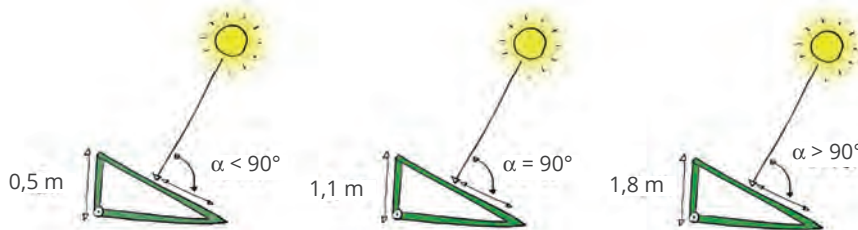
Loïc et Yassine se baladent dans un parc d'attractions et se dirigent vers une montagne russe ultra impressionnante. Celle-ci monte d'abord jusqu'au point le plus haut et ensuite elle dévale les rails à toute vitesse. En quelques instants, ils atteignent leur hauteur maximale, située à 44,8 m du sol. Ils se situent à ce moment-là à une distance horizontale de 8 m du lieu d'embarquement, qui lui se trouve au niveau du sol. Loïc prétend que le manège monte à la verticale. A-t-il raison ?



3



Pour une rentabilité maximale, il faut que les rayons du soleil forment un angle droit avec le panneau solaire. Il faut donc l'incliner de la bonne façon. Donne l'inclinaison au centième près dans les 3 cas représentés, sachant qu'un panneau solaire a une longueur de 2,8 m.



4

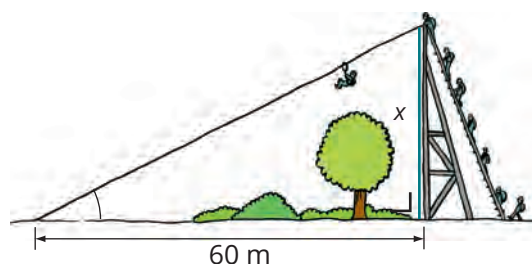
La tour de Pise mesure 54,56 m. Comme tu le sais, elle est inclinée par rapport à la verticale. Le sommet s'écarte de la verticale de 5,23 m. Exprime l'inclinaison de la tour de Pise par rapport à la verticale sous forme de pourcentage.



5



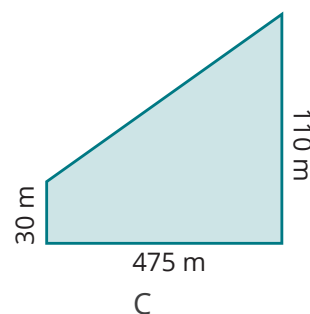
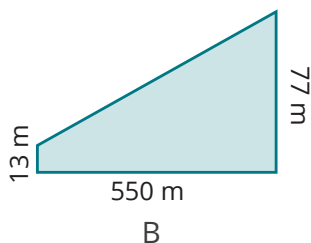
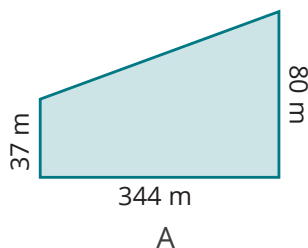
Une tyrolienne est installée pour la fête de l'école. À l'entrée, il est indiqué « PENTE DE 70% ». À quelle hauteur se situe le départ ?



6

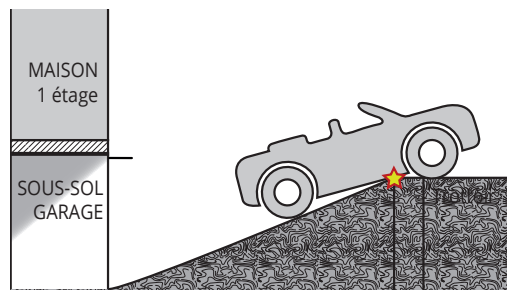


Trois immenses toboggans sont placés dans un nouveau parc d'attractions. Donne la pente de chacun d'eux.



7

Pour éviter ce genre de désagréments en sortant de son garage, il faut que la pente soit de 40 % maximum. Si le trottoir se situe à 2 m au-dessus du niveau du garage, à quelle distance du trottoir la porte de garage doit-elle se trouver ?



8

Tu as certainement déjà vu ce genre de panneau sur les routes. Steve et Kelly ont deux opinions bien différentes. Steve prétend qu'il s'agit de la pente. Kelly est persuadée que ce panneau indique l'inclinaison.

Calcule l'angle de la route formé avec l'horizontale selon Steve et selon Kelly. Donne une conclusion.



9

Lors du tour de France, les coureurs doivent monter une route pour laquelle on indique une pente de 9 %. Quel est le changement d'altitude après avoir parcouru 500 m horizontalement ?

# Partie 5 Nombres trigonométriques particuliers



## 1. Exploration

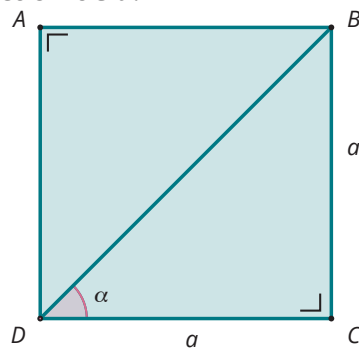
### ► Exploration n°1

#### Le demi-carré



Dans le carré de côté  $a$  ci-dessous, on a tracé une diagonale. Quelles sont les propriétés du triangle ainsi formé ?

Calcule les nombres trigonométriques de l'angle  $\alpha$ . Pour cela, tu devras d'abord exprimer la mesure de la diagonale en fonction de  $a$ .



### ► Exploration n°2

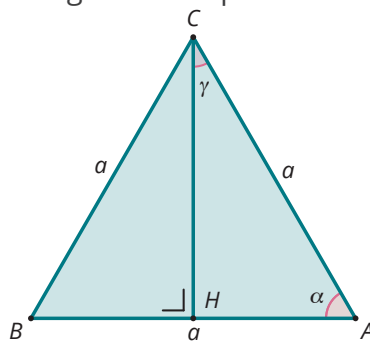
#### Le demi-triangle équilatéral

Dans le triangle équilatéral  $ABC$  de côté  $a$ , on a tracé la hauteur  $CH$ . On voit donc apparaître le triangle  $BCH$ .

Quelle est la nature de ce triangle ?

Que peux-tu dire sur les mesures de ses côtés et l'amplitude des angles  $\alpha$  et  $\gamma$  ?

Calcule maintenant les nombres trigonométriques des angles  $\alpha$  et  $\gamma$ .



## 2. Synthèse

Complète le tableau suivant :

$\alpha =$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$
$\sin \alpha =$	?	?	?
$\cos \alpha =$	?	?	?
$\tan \alpha =$	?	?	?



## 3. Applications



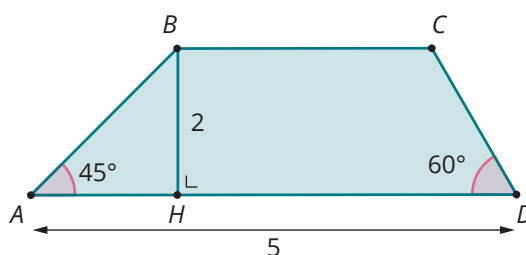
1

Vrai ou faux ? Détermine la réponse sans calculatrice.

- a)  $\sin(30^\circ + 30^\circ) = \sin 30^\circ + \sin 30^\circ$
- b)  $\tan 60^\circ = \frac{\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ}$
- c)  $\sin^2 30^\circ + \sin^2 60^\circ = 1$
- d)  $\tan 30^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ}$

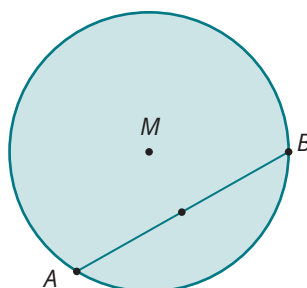
2

Calcule l'aire du trapèze  $ABCD$  sans utiliser ta calculatrice.



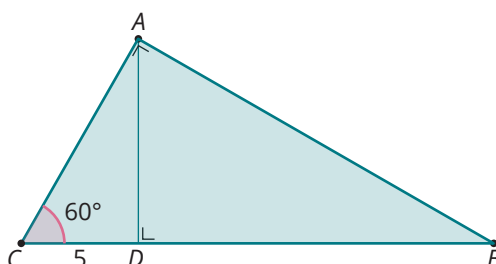
3

Les points  $A$  et  $B$  appartiennent au cercle de centre  $M$  et de rayon 4 cm. L'angle  $\widehat{AMB}$  a une amplitude de  $120^\circ$ . Calcule la mesure du segment  $[AB]$  sans calculatrice.



4

Dans le triangle  $ABC$ , rectangle en  $A$ ,  $\widehat{C} = 60^\circ$  et  $|CD| = 5$ . Calcule les longueurs des segments  $[AC]$ ,  $[AB]$ ,  $[AD]$  et  $[BD]$  sans calculatrice.



5

Explique comment découper une pizza circulaire en 3 parts égales sans mesurer les amplitudes d'angles.

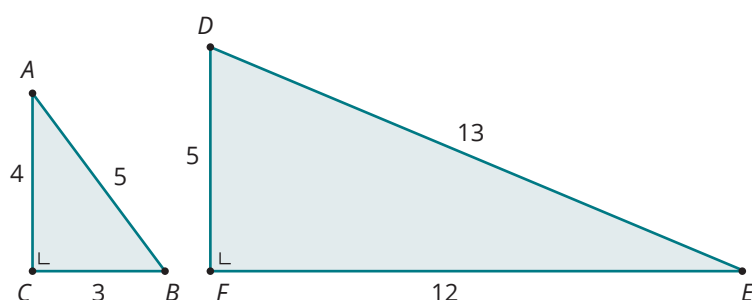


# Partie 6 Relation entre les nombres trigonométriques et formule fondamentale



## 1. Exploration

a) Pour les deux triangles ci-dessous, calcule les valeurs demandées dans les tableaux.

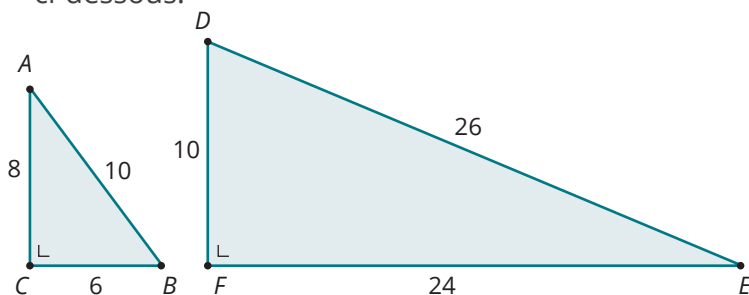


$\sin \hat{A}$	?	$\sin \hat{E}$	?
$\cos \hat{A}$	?	$\cos \hat{E}$	?
$\tan \hat{A}$	?	$\tan \hat{E}$	?
$\frac{\sin \hat{A}}{\cos \hat{A}}$	?	$\frac{\sin \hat{E}}{\cos \hat{E}}$	?

b) Quelle formule peux-tu en déduire ?

c) Démontre cette égalité.

d) Maintenant, calcule les valeurs demandées dans les tableaux pour les deux triangles ci-dessous.



$\sin \hat{A}$	?	$\sin \hat{E}$	?
$\sin^2 \hat{A}$	?	$\sin^2 \hat{E}$	?
$\cos \hat{A}$	?	$\cos \hat{E}$	?
$\cos^2 \hat{A}$	?	$\cos^2 \hat{E}$	?
$\sin^2 \hat{A} + \cos^2 \hat{A}$	?	$\sin^2 \hat{E} + \cos^2 \hat{E}$	?

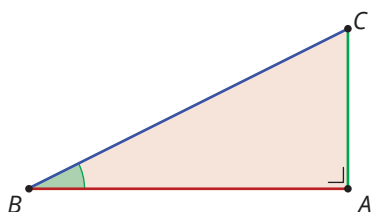
e) Quelle formule ressort de tes calculs ?

f) Après avoir déduit cette formule, vérifie avec les valeurs trouvées pour les angles particuliers :

- Pour un angle de  $30^\circ$  : ?
- Pour un angle de  $45^\circ$  : ?
- Pour un angle de  $60^\circ$  : ?



Maintenant il faut passer à la démonstration de cette nouvelle formule. Souviens-toi des 3 étapes.



Hypothèse : ?

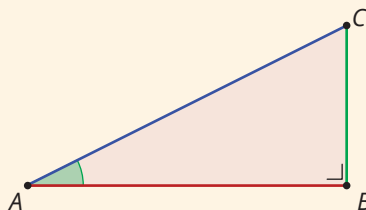
Thèse : ?

Démonstration : ?



## 2. Synthèse

Soit le triangle  $ABC$ , rectangle en  $B$ .



- Quelle relation existe-t-il entre les nombres trigonométriques de l'angle  $\hat{A}$  ? **?**
- Quelle est la formule fondamentale ? **?**



## 3. Applications



1

Calcule les nombres trigonométriques manquants sans déterminer l'amplitude de l'angle :

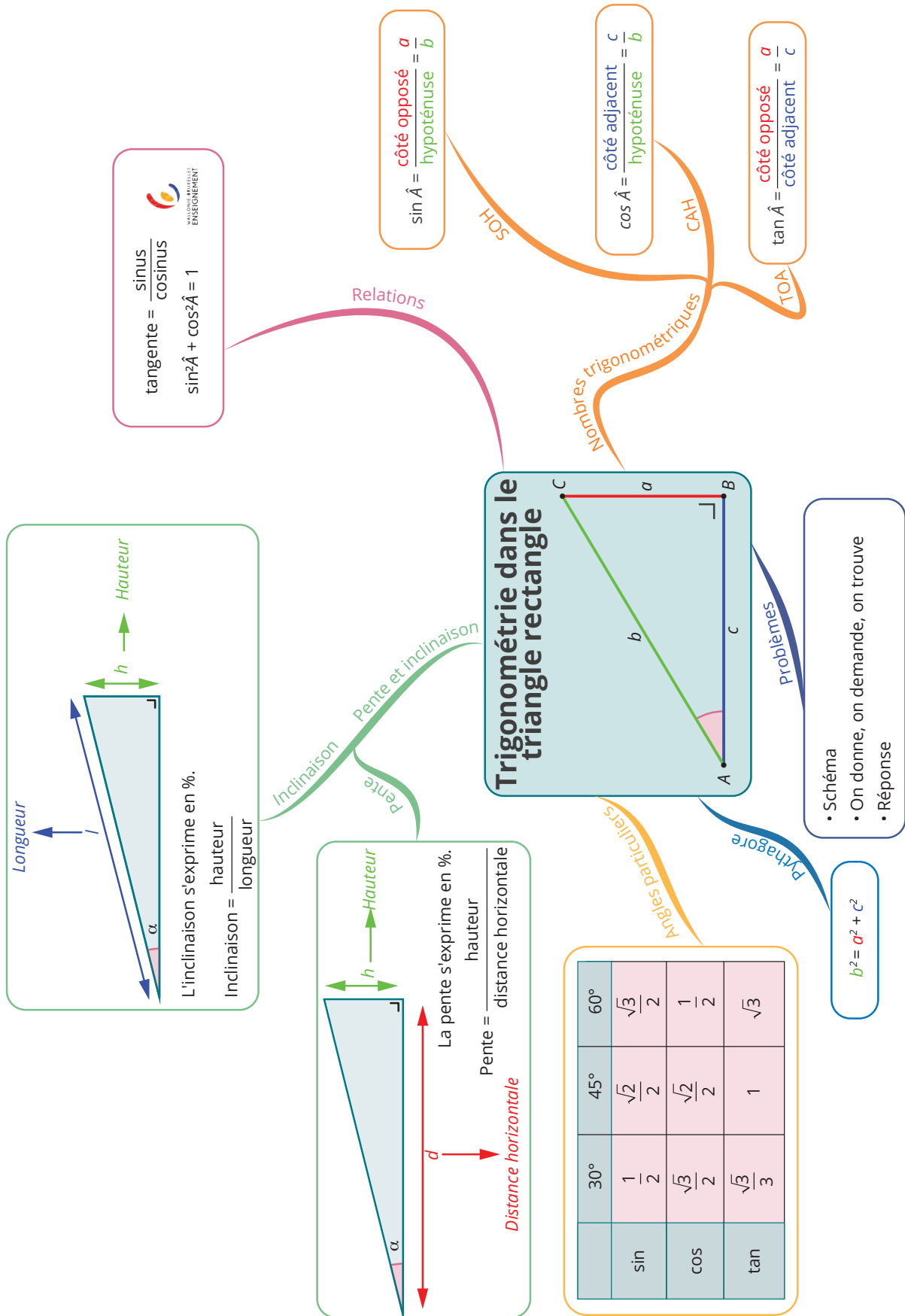
	$\sin \hat{A}$	$\cos \hat{A}$	$\tan \hat{A}$
a)	<b>?</b>	$\frac{4}{5}$	<b>?</b>
b)	$\frac{2}{3}$	<b>?</b>	<b>?</b>
c)	$\sqrt{\frac{5}{3}}$	<b>?</b>	<b>?</b>
d)	<b>?</b>	$\frac{5}{7}$	<b>?</b>
e)	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	<b>?</b>	<b>?</b>
f)	<b>?</b>	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	<b>?</b>

2

Simplifie les expressions suivantes :

6

- $1 - \cos^2 \hat{A} = \text{?}$
- $\sin \hat{B} \cdot \cos \hat{B} \cdot \tan \hat{B} = \text{?}$
- $\frac{\tan \hat{C}}{\sin \hat{C}} = \text{?}$
- $2 \cdot \sin^2 \hat{D} + 2 \cdot \cos^2 \hat{D} = \text{?}$
- $2 - \cos^2 \hat{E} - \sin^2 \hat{E} = \text{?}$
- $3 \cdot \cos^2 \hat{F} + 3 \cdot \sin^2 \hat{F} = \text{?}$
- $\tan^2 \hat{G} \cdot \cos^2 \hat{G} - \sin^2 \hat{G} = \text{?}$
- $1 + \cos^2 \hat{F} - \sin^2 \hat{F} = \text{?}$
- $\frac{\sin \hat{I}}{(\tan^2 \hat{I} \cdot \cos \hat{I})} = \text{?}$
- $\frac{(\sin \hat{J} \cdot \cos \hat{J})}{\tan \hat{J}} = \text{?}$

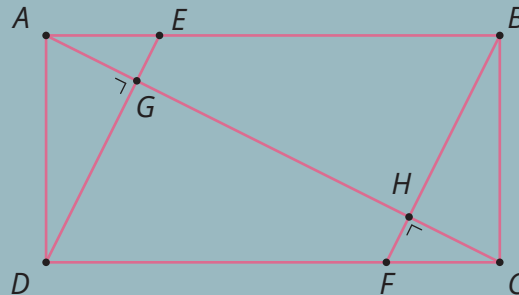




## Je me teste !

1

Dans le rectangle  $ABCD$ , les droites  $DG$  et  $HF$  sont perpendiculaires à  $AC$ .  $E$  appartient au côté  $[AB]$  et  $F$  appartient au côté  $[CD]$ . Quelles égalités sont vraies?



a)  $\cos \widehat{EBF} = \frac{|BC|}{|BH|}$

c)  $\cos \widehat{GDF} = \frac{|DG|}{|DC|}$

e)  $\sin \widehat{HCF} = \frac{|AD|}{|AC|}$

g)  $\cos \widehat{EAG} = \frac{|AH|}{|AB|}$

b)  $\tan \widehat{ADE} = \frac{|AD|}{|AE|}$

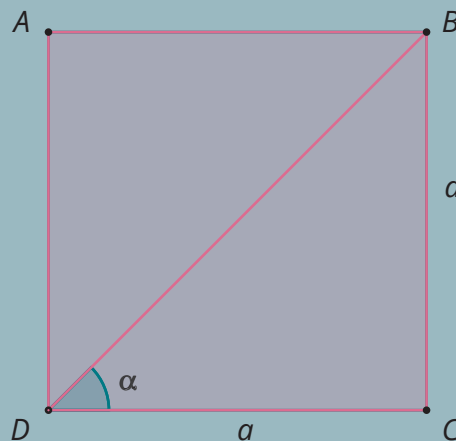
d)  $\sin \widehat{HCF} = \frac{|AC|}{|AD|}$

f)  $\sin \widehat{AEG} = \frac{|AD|}{|AE|}$

h)  $\tan \widehat{HFC} = \frac{|BC|}{|FC|}$

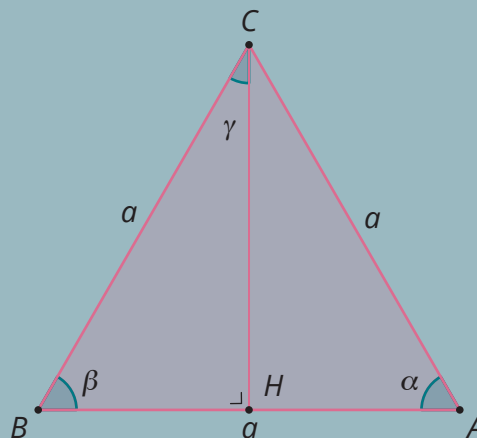
2

ÉTABLIS les nombres trigonométriques de l'angle  $\alpha$ .  $ABCD$  est un carré de côté  $a$ .



3

ÉTABLIS les nombres trigonométriques des angles  $\beta$  et  $\gamma$ . Le triangle  $ABC$  est équilatéral.

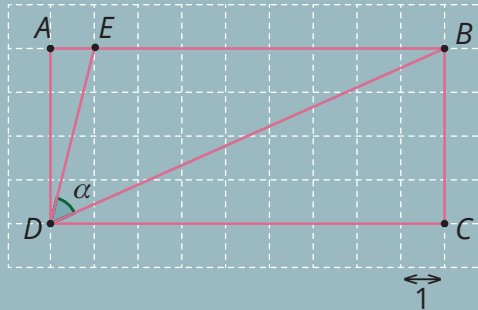




Je me teste !

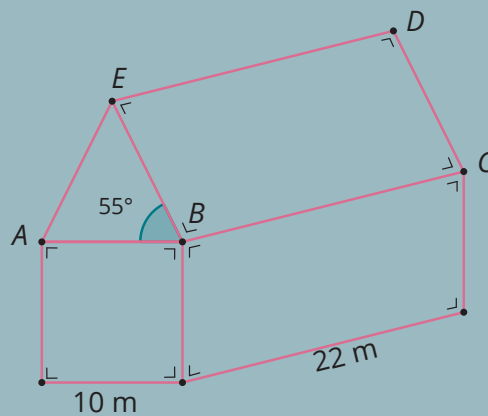
4

Dans le rectangle suivant, **CALCULE** l'amplitude de l'angle  $\alpha$ . Sers-toi du quadrillage pour les mesures des côtés.



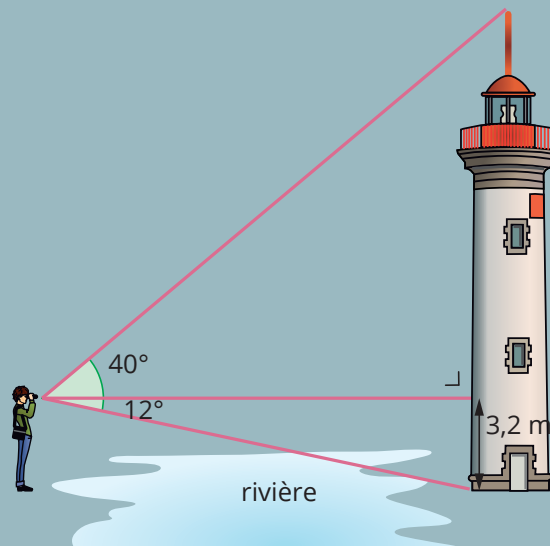
5

**CALCULE** l'aire totale de la toiture.

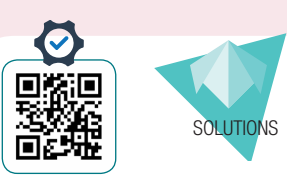


6

Un artiste veut connaître la hauteur d'une tour pour la décorer pour une fête. Il ne peut cependant pas accéder directement à la tour car une rivière l'en sépare. Il est équipé d'un théodolite qui permet de mesurer les 2 angles indiqués sur le dessin ci-dessous. **CALCULE** la hauteur de la tour.



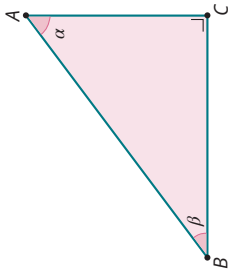
Exercices supplémentaires



C1 1

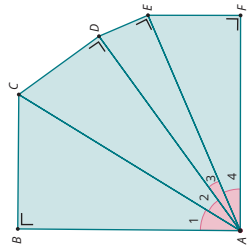
Le triangle ABC est rectangle en C. Place une croix dans le tableau lorsque l'expression est correcte...

	$\frac{ BC }{ AB }$	$\frac{ AC }{ BC }$	$\frac{ AC }{ AB }$	$\frac{ AB }{ AC }$
$\sin \alpha =$				
$\sin \beta =$				
$\cos \alpha =$				
$\cos \beta =$				
$\tan \alpha =$				
$\tan \beta =$				



2 Complète :

a) $\sin \hat{A}_1 = ?$	$\cos \hat{A}_1 = ?$	$\tan \hat{A}_1 = ?$
b) $\sin \hat{A}_2 = ?$	$\cos \hat{A}_2 = ?$	$\tan \hat{A}_2 = ?$
c) $\sin \hat{A}_3 = ?$	$\cos \hat{A}_3 = ?$	$\tan \hat{A}_3 = ?$
d) $\sin \hat{A}_4 = ?$	$\cos \hat{A}_4 = ?$	$\tan \hat{A}_4 = ?$

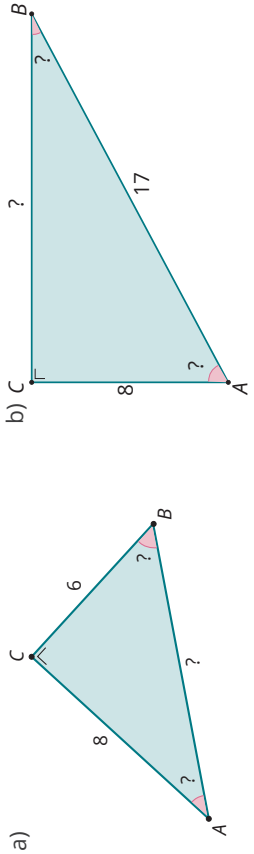


3 Après avoir parcouru 5 km sur une route, un cycliste est monté de 30 m en altitude. Quel panneau trouve-t-on au début de cette route ?



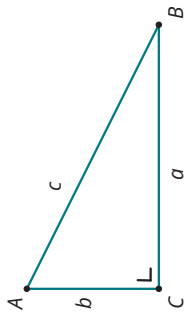
C2 4

Complète les données manquantes des triangles.



5 Complète le tableau suivant en te servant de la figure.

	a	b	c	$ \hat{A} $	$ \hat{B} $
a) $\sin \hat{A} = ?$	?	?	5	45°	?
b) $\sin \hat{B} = ?$	7	?	?	45°	?
c) $\cos \hat{A} = ?$	5	?	?	?	30°
d) $\cos \hat{B} = ?$	?	?	12	60°	?
e) $\tan \hat{A} = ?$	?	3	?	?	45°
f) $\tan \hat{B} = ?$	?	$\sqrt{27}$	6	?	?
g) $\sin \hat{A} = ?$	4	?	?	30°	?
h) $\sin \hat{B} = ?$	?	2	?	18°	?
i) $\cos \hat{A} = ?$	?	?	7	?	23°
j) $\cos \hat{B} = ?$	?	8	9	?	?

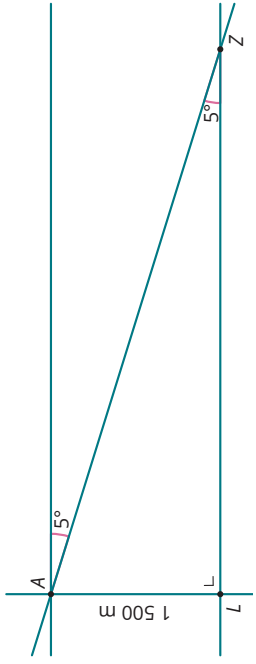


- 6 Soit ABC, un triangle rectangle en B. Si  $|AB| = 35$  cm et  $|\hat{A}| = 36^\circ$ , calcule  $|BC|$ .
- 7 Soit ABC, un triangle rectangle en C. Si  $|AC| = 22$  cm et  $|\hat{A}| = 36^\circ$ , calcule  $|AB|$ .
- 8 Soit ABC, un triangle rectangle en B. Si  $|AB| = 35$  cm et  $|BC| = 25$  cm, calcule  $|\hat{A}|$ .
- 9 Soit ABC, un triangle rectangle en C. Si  $|BC| = 35$  cm et  $|\hat{A}| = 27^\circ$ , calcule  $|AC|$ .
- 10 Soit ABC, un triangle rectangle en B. Si  $|AC| = 5$  cm et  $|BC| = 8$  cm, calcule  $|\hat{A}|$ .

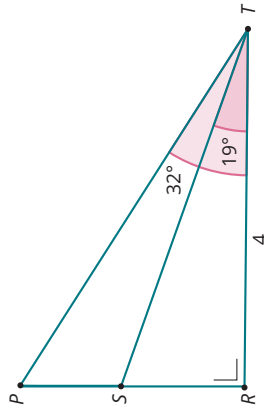
Dans un conteneur de forme parallélépipède rectangle de 8 m sur 4 m sur 3 m, on place une tige en fer en diagonale. Calcule sa longueur et l'angle qu'elle forme avec le plan horizontal.

12 Une pyramide en Égypte possède des arêtes de 800 m de long. La base est carrée de côté 500 m. Calcule la hauteur de la pyramide.

13 Un avion se situe à 1 500 m d'altitude quand il survole le village de Londerzeel. C'est là qu'il entame sa descente sous un angle de  $5^\circ$  par rapport à l'horizontale et il conserve cet angle tout au long de l'atterrissage. L'avion se posera à l'aéroport de Zaventem. Peux-tu déterminer à quelle distance à vol d'oiseau Londerzeel se trouve de Zaventem ?



14 Calcule la longueur  $|PS|$ .



15 Calcule l'inclinaison d'une échelle de 4,5 m qui atteint une hauteur de 4 m.

#### 16 LOI DE SNELL – DESCARTES

L'optique est la science qui étudie la lumière et ses propriétés. Quand un rayon de lumière change de milieu, sa trajectoire est modifiée, on dit que le rayon est réfracté sur ce mur.

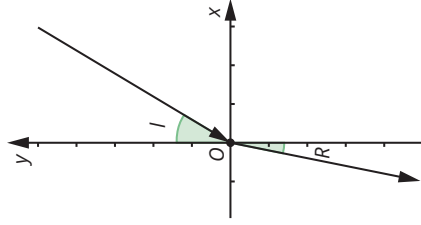
Le schéma ci-contre représente un rayon lumineux qui passe de l'air dans l'eau. L'axe des abscisses représente la surface de l'eau et l'origine du repère l'endroit où le rayon entre dans l'eau.

D'après la loi de Snell-Descartes, la lumière va passer par le

point  $O$  tel que :  $\frac{\sin \hat{I}}{4} = \frac{\sin \hat{R}}{3}$

$\hat{I}$  étant l'angle d'incidence et  $\hat{R}$  étant l'angle de réfraction.

- a) Calcule  $\hat{R}$  si  $|\hat{I}| = 50^\circ$   
 b) Dans un aquarium de 40 cm de profondeur, un rayon lumineux atteint le fond à 10 cm de la normale. Quelle est l'amplitude de l'angle d'incidence ?



17 Une piscine de 50 m de long n'a pas la même profondeur partout. D'un côté, elle a une profondeur de 0,5 m et de l'autre une profondeur de 3 m. Calcule l'angle de la pente du fond.

18 Le premier janvier 2017, on lisait dans les journaux : « Un crash aérien évité de peu à Gand ».

En effet, un avion qui avait décollé à Ostende et un avion venant de Paris ont failli se percuter.

Une distance verticale de seulement 90 m les séparait. La droite imaginaire entre les deux avions formait un angle de  $4^\circ$  avec l'horizontale.

#### Avion-cargo égyptien

D'après la VRT, un avion-cargo égyptien, un airbus A300, qui avait décollé depuis l'aéroport d'Ostende, serait presque entré en collision avec un avion de ligne de la compagnie Air France, un Airbus A320, qui assurait la liaison entre Paris et Amsterdam.

#### Collision évitée de justesse

Toujours selon la VRT, l'avion français se trouvait alors à 22.000 pieds, soit à 6.000 mètres de haut, et entamait sa descente lorsqu'il a presque heurté l'avion-cargo égyptien qui, lui, se trouvait à 21.000 pieds et était en phase ascendante.

#### Instructions non respectées

L'avion d'Egyptair aurait ignoré à trois reprises les instructions des contrôleurs aériens lui demandant d'adapter sa hauteur et d'arrêter de grimper. Même lorsque le système d'alerte TCAS qui prévient l'équipage d'un danger imminent – s'est déclenché, l'appareil égyptien a continué à ignorer les instructions des contrôleurs aériens.

#### 90 mètres

La distance entre les deux appareils n'était plus que de 90 mètres verticalement et de ..... mètres horizontalement lorsqu'ils se sont croisés. Dans le rapport provisoire, il est question d'un « incident sérieux ».

- a) Quelle était la distance entre les deux avions ?  
 b) Quelle était la distance horizontale entre les deux avions ?

19 La distance entre le corner d'un terrain de foot et le poteau le plus proche est de 33,5 m.

Le but a une largeur de 7,32 m et une hauteur de 2,44 m. Depuis ce corner, on voit le corner le plus proche et le premier poteau du but le plus proche de l'autre côté sous un angle de  $71,5^\circ$ .

- a) Calcule la largeur et la longueur du terrain.  
 b) Sous quel angle un joueur voit-il le but s'il se trouve au milieu du terrain ?  
 c) Sous quel angle un joueur voit-il le but d'en face quand il se trouve au corner ?



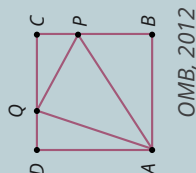


## Challenges mathématiques

### Exercice 1

Dans le carré de côté 3 ci-contre,  $|PC| = |QD| = 1$ .  
Que vaut  $\tan \angle AQP$  ?

A	$\frac{9}{7}$	B	$\sqrt{2}$	C	$\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{5}}$	D	7	E	21
---	---------------	---	------------	---	------------------------------	---	---	---	----



OMB, 2012

### Exercice 2

Alors qu'un avion est à 45 km de l'aéroport de Toulouse, le radar de la tour de contrôle émet un signal bref en direction de l'avion. Le signal atteint l'avion et revient au radar 0,0003 seconde après son émission.  
La direction radar-avion fait un angle de  $5^\circ$  avec l'horizontale.  
Calcule alors l'altitude de l'avion à cet instant.

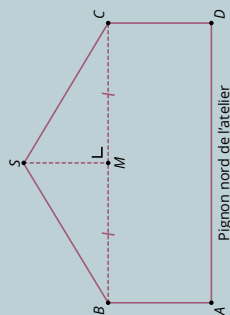


Le dessin n'est pas à l'échelle

Diplôme national du brevet des collèges, métropole 2012

### Exercice 3

Monsieur Duchêne veut barder (recouvrir) de bois le pignon nord de son atelier. Ce pignon ne comporte pas d'ouverture.  
On donne  $|AD| = 6$  m;  $|AB| = 2,20$  m et  $|SM| = 1,8$  m et  $M$  est le milieu de  $[BC]$ .



Monsieur Duchêne a besoin de connaître la mesure de l'angle  $\widehat{SBM}$  pour effectuer certaines découpes. Calcule cette amplitude. Le résultat sera arrondi au degré près.

Diplôme national du brevet des collèges, Pondichéry, brevet, 2012