+ EXERCICES INTERACTIFS

SCOODLE

MATHÉMATIQUES

G. Leenaers
G. Sluiter
V. Wuyts

CROC'MATH 3B

MANUEL

Plantyn

Chapitre 9
Les systèmes d'équations

Matières abordées

UAA4 UAA5

Prérequis

1. La méthode de substitution

2. La méthode de Gauss ou combinaison linéaire

3. Les différents cas

4. Résolution de problèmes à l'aide d'un système de deux équations à deux inconnues

Objectifs

Je serai capable de…

CONNAITRE

/

APPLIQUER

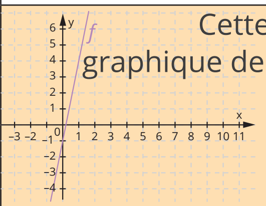
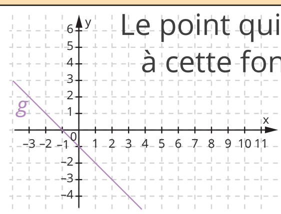
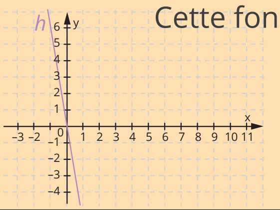
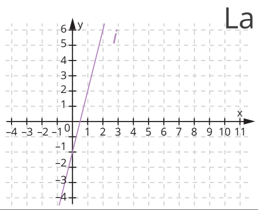
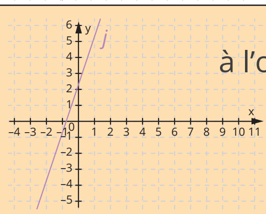
- ☐ Déterminer algébriquement et graphiquement le point d'intersection des graphiques de deux fonctions du premier degré et/ou constantes.
- ☐ Résoudre un système de deux équations à deux inconnues.

TRANSFÉRER

- ☐ Résoudre un problème se ramenant à la résolution d'un système d'équations.

PRÉREQUIS

L'échauffement, c'est essentiel !
Revoyons quelques notions avant d'aborder le chapitre.

Trouve la ou les bonne(s) réponse(s).		A	B	C	D
1	3 est solution de …	$3x + 9 = 5$	$-3x + 9 = 0$	$2x + 2 = 8$	$2x + 3 = 6$
2	La solution de $3(x + 2) - 5 = 0$ est …	0,333 3…	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	5
3	$f(x) = 5x + 3$	$f(2) = 13$	$f(3) = 18$	$f(-2) = -13$	$f(1) = 8$
4	Le point (3 ; 5) appartient à …	$y = 4x + 2$	$y = x + 2$	$5y = 3x$	$y = 2x$
5	Les points qui appartiennent à $f(x) = -3x + 2$ sont …	(–2 ; –8)	(2 ; –4)	(–2 ; –4)	(–2 ; 0)
6	–5 est solution de …	$2x - 3 = 4$	$8x + 5 = 7x$	$2x + 3 = 4x - 5$	$2x = -10$
7	La solution de $4 - (2x + 5) + 7 = 4(2x - 1)$ est …	–1	–2	1	5
8	Pour $f(x) = 4x - 2$ on peut dire que …	$f(2) = 6$	$f(3) = 10$	$f(-2) = -10$	$f(-6) = 22$
9	Le point (–2 ; 0) appartient à …	$y = 4x + 2$	$y = x + 2$	$5y = 3x$	$2x = y$
10	Les points qui appartiennent au graphique de $f(x) = 5x + 2$ sont …	(2 ; 3)	(4 ; 22)	(1 ; 7)	(–2 ; 5)
11	 Cette droite est le graphique de la fonction…	$y = -x + 1$	$y = -5x - 1$	$y = 5x - 1$	$y + 1 = 5x$
12	 Le point qui appartient à cette fonction est …	(–1 ; –1)	(0 ; – 1)	(–1 ; 0)	(2 ; 0)
13	 Cette fonction est …	affine croissante	décrois-sante linéaire	décrois-sante affine	linéaire croissante
14	 La racine est …	–2	0,5	aucune	-4
15	 L'ordonnée à l'origine est …	$-\frac{2}{3}$	2	(0 ; 2)	-1

SCOODLE Tu rencontres des difficultés à résoudre ces exercices ? Tu trouveras sur Scoodle des rappels de cette matière et des exercices interactifs.

Partie 1 La méthode de substitution

1. Exploration

Deux tarifs sont proposés à l'entrée de la piscine :
Tarif A : tu paies 3 € à chaque entrée.
Tarif B : tu achètes la carte piscine à 20 €, valable 1 an, et du coup chaque entrée ne te coute plus que 2 €.
Pour combien d'entrées les deux tarifs seront-ils identiques ?

a) Pour le savoir, écris les deux équations. *y* représente le prix à payer et *x* le nombre d'entrées.

b) Les deux équations sont liées, on les écrira avec une accolade.

c) Chaque équation est l'expression d'une fonction. Représente-les graphiquement.

d) Quel est le point d'intersection de ces deux droites ? Quelle est la réponse à la question de départ ?

e) Pourrais-tu en avoir la certitude en utilisant ces deux équations du premier degré ?

f) À partir des équations, et sans graphique, aurais-tu pu trouver le point d'intersection des deux droites?

2. Synthèse

Pour résoudre un système de deux équations à deux inconnues, il y a plusieurs méthodes. Tu viens d'en voir deux. La méthode de substitution et la méthode graphique.

a) Quel est l'avantage de chacune d'entre elles ?

b) Voici un exercice résolu avec la méthode de substitution. Explique chaque étape.

$$\begin{cases} x + 5y = 3 \\ 3x + 2y = 22 \end{cases}$$

1	$x = 3 - 5y$	?
2	$3(3 - 5y) + 2y = 22$	?
3	$9 - 15y + 2y = 22$ $-13y = 13$ $y = -1$	?
4	$x + 5 \,.\, (-1) = 3$ $x = 8$	?
5	$S = \{(8\,;\,-1)\}$	?

c) Comment vérifier de deux manières ?

3. Applications

EXERCICES INTERACTIFS

1 Le point de coordonnées (–4 ; 3) est-il solution des systèmes d'équations ci-dessous ? Justifie par calcul.

a) $\begin{cases} 5x + 6y = -2 \\ 4x + 3y = -7 \end{cases}$? car ?

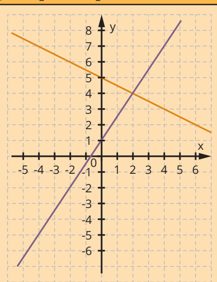
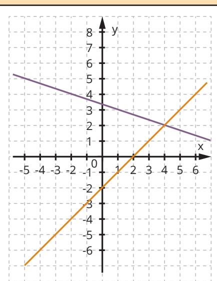
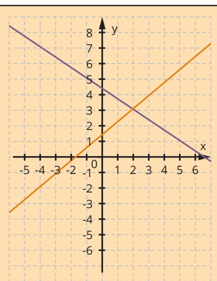
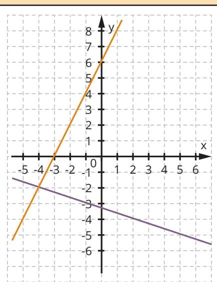
b) $\begin{cases} 2x + 3y = -6 \\ -3x - 4y = 7 \end{cases}$? car ?

c) $\begin{cases} 4x - 3y = -25 \\ 3x + 4y = 0 \end{cases}$? car ?

d) $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ -2x - y = 5 \end{cases}$? car ?

e) $\begin{cases} -3x - 5y = -3 \\ 3x + 2y = 6 \end{cases}$? car ?

2 Associe chaque graphique à son système et à sa solution.

graphiques		systèmes		solutions	
I		1	$\begin{cases} -3x + 2y = 2 \\ x + 2y = 10 \end{cases}$	a	S = {(2 ; 3)}
II		2	$\begin{cases} 2x - y = -6 \\ x + 3y = -10 \end{cases}$	b	S = {(3 ; 2)}
III		3	$\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 5x - 6y = -8 \end{cases}$	c	S = {(2 ; 4)}
IV		4	$\begin{cases} x + 3y = 10 \\ -x + y = -2 \end{cases}$	d	S = {(4 ; 2)}
				e	S = {(–4 ; –2)}

3 Voici 4 systèmes. Résous-les avec la méthode de substitution et vérifie la solution algébriquement et graphiquement.

a) $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = x - 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -3x = -y - 4 \\ y = -x - 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -3 = 2x - y \\ y = 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + 5y = 3 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$

4 Résous les systèmes suivants en utilisant la méthode de substitution. Vérifie tes solutions.

a) $\begin{cases} 3x - 5 = y \\ 2y - 2x = 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x + y = -6 \\ 3y - 3 = -5x \end{cases}$

c) $\begin{cases} -x + 4y = -18 \\ 3x - 10 = y \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x - 3y + 7 = 0 \\ -3x - 4y = 19 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x + 4y = 2 \\ 8 = -4x + 8y \end{cases}$

f) $\begin{cases} 0 = 8 - 6x - 2y \\ 12x + 10y = 4 \end{cases}$

g) $\begin{cases} -3x - 2y = 2 \\ 3y + 5x = -5 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 32 = -6y + 2x \\ 56 = -4x - 3y \end{cases}$

i) $\begin{cases} -5x + 2y = 5 \\ 5 = 10x - 3y \end{cases}$

j) $\begin{cases} -6x + 2y = 18 \\ 7x - 3y = -27 \end{cases}$

Partie 2 La méthode de Gauss ou combinaison linéaire

1. Exploration

Pour les anniversaires de ses copines, Camille voudrait leur offrir une place de cinéma.
Elle hésite car si elle achète 3 places de cinéma normales et 2 places de cinéma 3D, elle en a pour 22 €. Par contre, si elle achète 2 places de cinéma normales et 3 places de cinéma 3D, elle en a pour 23 €.
Pourrais-tu retrouver le prix de chaque place ?

Nous allons voir une nouvelle manière de résoudre un système, il s'agit de la méthode de Gauss.

Rappelle-toi les 5 étapes de résolution :
1. Choix des inconnues
2. Mise en équation
3. Résolution
4. Vérification
5. Solution

1. Choix des inconnues
   Soit *x*, le prix d'une place de cinéma normale et *y*, le prix d'une place de cinéma 3D
2. Mise en équation (écris les 2 équations en n'oubliant pas de les lier avec une accolade)
3. Résolution (ici avec la méthode de Gauss)
   a) Vérifier que le système est ordonné (les *x* en dessous des *x*, les *y* sous les *y* et les termes indépendants également).
   b) Multiplier chaque équation par un nombre afin que les coefficients en *x* ou en *y* soient opposés dans les deux équations.
   c) Additionner l'équation 1 et l'équation 2 : une des 2 inconnues « disparait ».
   d) Résoudre l'équation du premier degré à une inconnue obtenue.
   e) Remplacer la valeur trouvée dans une des deux équations pour trouver l'autre inconnue.
   OU
   Effectuer la même démarche pour supprimer l'autre inconnue.
   f) Écrire la solution.
4. Vérification
5. Solution

2. Synthèse

La méthode de Gauss peut être utilisée de trois manières :

1) Gaëlle préfère procéder comme dans l'introduction : trouver une inconnue et ensuite utiliser la substitution.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 22 & . (-2) \\ 2x + 3y = 23 & . (3) \end{cases}$$

C'est en fait un mélange des méthodes de Gauss et de substitution.

$$\oplus \begin{cases} -6x - 4y = -44 \\ 6x + 9y = 69 \end{cases}$$

$$5y = 25$$
$$y = 5$$

On remplace y par 5 dans la première équation :

$$3x + 2 . 5 = 22$$
$$3x = 12$$
$$x = 4$$

S = {(4 ; 5)}

2) Valérie n'aime vraiment pas la méthode de substitution et décide de procéder ainsi :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 22 \\ 2x + 3y = 23 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} . (-2) \\ . 3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} . (-3) \\ . 2 \end{vmatrix}$$

$$\oplus \begin{cases} -6x - 4y = -44 \\ 6x + 9y = 69 \end{cases} \qquad \oplus \begin{cases} -9x - 6y = -66 \\ 4x + 6y = 46 \end{cases}$$

$$/ \quad 5y = 25 \qquad -5x \quad / \quad = -20$$

$$y = 5 \qquad x = 4$$

S = {(4 ; 5)}

3) Gwenaëlle préfère aller plus rapidement et procède ainsi :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 22 & \cdot (-2) & \cdot (-3) \\ 2x + 3y = 23 & \cdot 3 & \cdot 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5y = 25 \\ -5x = -20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 5 \\ x = 4 \end{cases} \qquad S=\{(4 ; 5)\}$$

Explique chaque méthode.

De toute façon, peu importe la méthode, tu ne dois pas oublier de toujours vérifier !
Et n'oublie pas non plus qu'il ne sert à rien de bruler les étapes ni d'aller trop vite…

3. Applications

EXERCICES INTERACTIFS

1

Voici trois systèmes.
Résous-les avec la méthode de Gauss et vérifie de deux manières différentes.

a) $\begin{cases} 3y = 2x - 3 \\ 4y = x + 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 4 = x + 2y \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x = 2y - 3 \\ 4y = 3x + 1 \end{cases}$

2

Résous les systèmes suivants en utilisant la méthode de Gauss.
Vérifie tes solutions.

a) $\begin{cases} x + 3y = 9 \\ -2x + y = 10 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x = 3 + y \\ 3x - 2y = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -3y + 6x = -3 \\ -4x - 3y = 7 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -6 = -2x - 4y \\ 5x + 4y = 33 \end{cases}$

e) $\begin{cases} -6y + 4x = -5 \\ 5x + 5y = 0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 7x + 3y + 9 = 0 \\ 6 = -5x - 2y \end{cases}$

g) $\begin{cases} 4y = 4 + 2x \\ -4x - 8y - 4 = 0 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 3x + 5y = 10 \\ -8y = -4 + 6x \end{cases}$

i) $\begin{cases} 12x - 12y = 0 \\ 5x + 3y = -24 \end{cases}$

j) $\begin{cases} -10 = 7x - 4y \\ 40 = -6x + 5y \end{cases}$

« Savais-tu » que ...

Surnommé « le prince des mathématiciens », Carl Friedrich Gauss (1777-1855) est considéré comme l'un des plus grands mathématiciens de tous les temps. La qualité extraordinaire de ses travaux scientifiques était déjà reconnue par ses contemporains.

Partie 3 Les différents cas

1. Exploration

Mathis, Maxime et Lisa sont dans la même classe.
Ils viennent de voir les systèmes d'équations et le professeur leur a demandé d'en inventer un et de le résoudre.
Lisa résout le sien et trouve une solution, comme vu en classe.
Mathis et Maxime ont beau recommencer, leur système ne donne pas comme solution un couple de nombres. Ont-ils fait une erreur de résolution ?
Représente les systèmes graphiquement.

Système de Lisa

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = -x - 2 \end{cases}$$

Système de Maxime

$$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ 2y = 4x + 4 \end{cases}$$

Système de Mathis

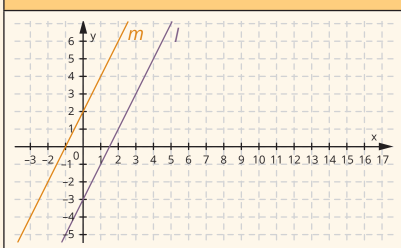
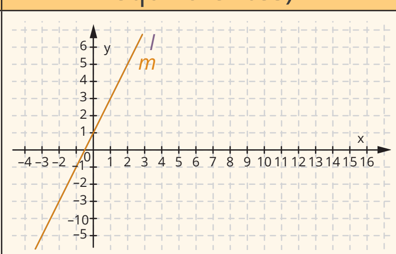
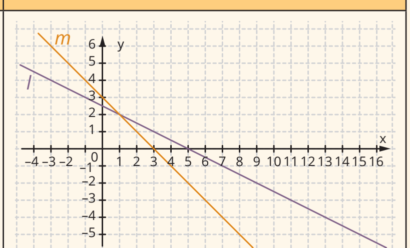
$$\begin{cases} 2y = 4x + 2 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$$

En regardant les différents coefficients, aurait-on pu prévoir le nombre de solutions ?

2. Synthèse

Trois cas peuvent se présenter lors de la résolution d'un système de deux équations à deux inconnues.
Explique les trois solutions possibles en établissant le lien graphique.
Comment déterminer le nombre de solutions sans le graphique ?
Reproduis et complète le tableau.

Un système peut être :

Impossible	?	?
?	Une infinité de solutions	?
?	?	Droites sécantes
?	Les coefficients des deux équations sont proportionnels (les équations sont équivalentes)	?
		
S = ?	S = ?	S = ?

1 2 3 4

3. Applications

EXERCICES INTERACTIFS

1 Donne le nombre de solutions de chaque système sans résoudre le système. Justifie.

a) $\begin{cases} y = x - 5 \\ 2y = 4x + 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4y = 2x - 3 \\ 4x + 4 = 2y \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4y = 8x - 4 \\ -4x - 4 + 2y = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 8x = 16y + 16 \\ 2y = 4x + 4 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 20y = 40x + 40 \\ 4x + 4 = 2y \end{cases}$

2 Deux amis vont boire un verre. L'addition pour trois cafés et une limonade est de 7,40 €. Finalement, ils décident de rester encore un peu. Après une heure, l'addition pour cinq cafés et cinq limonades s'élève à 19,45 €. Est-ce possible? Justifie.

Partie 4

Résolution de problèmes à l'aide d'un système de deux équations à deux inconnues

1. Exploration

Nathan joue au foot avec Jérémy.
Le premier jour, si on additionne le nombre de buts marqués par Nathan et le double de ceux marqués par Jérémy, on obtient 5.
Le lendemain, ils ont chacun marqué le même nombre de buts que la veille, mais si on calcule la somme du triple de chacun, on arrive à 9.
Combien de buts ont-ils marqués chacun ? N'oublie pas de vérifier.

2. Synthèse

Tu as vu comment déterminer le nombre de solutions, appliquer des méthodes de résolution d'un système et comment effectuer la vérification.
Pourrais-tu faire une synthèse de tout cela ?

a) Déterminer le nombre de solutions :

les coefficients de x et y sont-ils proportionnels ?

- oui → les termes indépendants sont-ils proportionnels ?
  - oui → ?
  - non → ?
- non → ?

b) Méthodes de résolution par calcul : ?

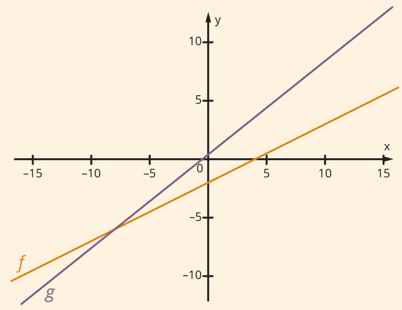
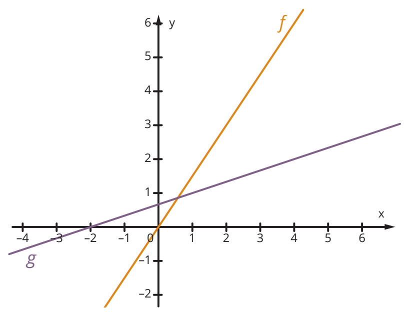
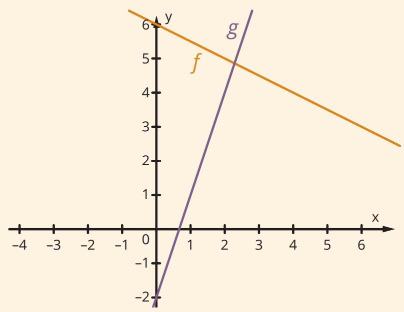
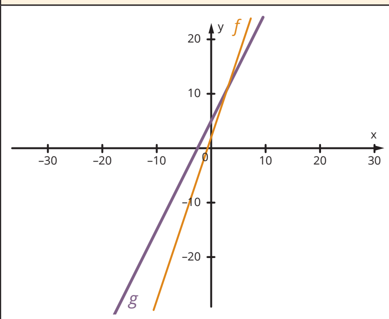
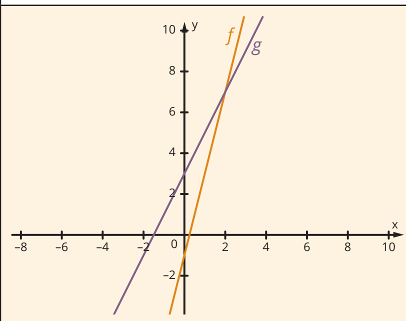
c) Vérification
- Algébriquement : ?
- Graphiquement : ?

(ATTENTION : c'est aussi une méthode de résolution, mais moins précise, donc on l'utilisera plus pour vérifier.)

3. Applications

EXERCICES INTERACTIFS

1 Associe les graphiques aux systèmes proposés.

1	$\begin{cases} y = 2x + 5 \\ 3x + 2 = y \end{cases}$	A	
2	$\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 4x + 2 = 5y \end{cases}$	B	
3	$\begin{cases} x + 2y = 12 \\ 3x - 2 = y \end{cases}$	C	
4	$\begin{cases} 2y = 8x - 2 \\ 3 + 2x = y \end{cases}$	D	
5	$\begin{cases} 2y = 3x \\ x + 2 = 3y \end{cases}$	E	

2 Voici deux systèmes. Résous-les de deux manières différentes. N'oublie pas de déterminer le nombre de solutions avant d'effectuer le système, et évidemment de vérifier ta solution.

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 9 \\ y = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -x + y = 9 \\ 2y - x = 3 \end{cases}$

3 Voici des systèmes, résous-les en utilisant la méthode de ton choix, et vérifie-les.

a) $\begin{cases} 4x + 3y = 2 \\ 4x + 12y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 20x - 30y = -30 \\ 2y - 3x = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + 3y = 9 \\ 2y - 3x = 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + 3y = 8 \\ 4x + 12x = 2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x + 6 = 8y \\ 4y + 12x = 2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 21x + 3y = 9 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 5 + 3y = 5x \\ -y + 3x = 0 \end{cases}$

h) $\begin{cases} -2x - 5y = 9 \\ 2y + 2x = 4x \end{cases}$

i) $\begin{cases} x = 5 \\ 4x + 12y = 2 \end{cases}$

j) $\begin{cases} 2x - 2y = 9y + 3 \\ 2y - 3x = 3 \end{cases}$

4 Le couple donné est-il solution des systèmes suivants ? Sans résoudre, écris ton raisonnement.

a) (7 ; 1) $\begin{cases} 2x + y - 15 = 0 \\ 3x - 8y - 12 = 0 \end{cases}$

b) (3 ; 3) $\begin{cases} 5x + 2y + 9 = 0 \\ -x - y = 0 \end{cases}$

c) $\left(\frac{1}{2} ; \frac{3}{4}\right)$ $\begin{cases} -3x + 2y = 0 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$

5 Dans un garage qui répare les voitures et les motos, … Lylia, qui attend que sa voiture soit réparée, s'amuse à compter les roues présentes sur tous les véhicules du garage. Il y en a 34 en tout. Si tu sais qu'il y a deux motos de plus que le nombre de voitures, combien y a-t-il de voitures ? de motos ?

6 On dispose de cubes de deux tailles différentes. Certains ont une arête de 3 cm, d'autres de 5 cm. Il y en a 20 en tout. Si on les aligne, on obtient une longueur de 1,5 m. Combien y a-t-il de cubes de chaque sorte ?

7 Lors d'un match de basket, suivant l'endroit d'où l'on tire, on gagne 2 ou 3 points. Durant le premier quart-temps, aucune pénalité (tir à 1 point) n'a été sifflée. Le résultat de l'équipe à l'issue de cette période était de 28 points. Cette équipe a marqué 12 paniers. Calcule le nombre de tirs à 3 points et à 2 points que cette équipe a marqués.

8 Tu organises un spectacle avec ton groupe de musique. Le prix des places debout est de 7 € et celui des places assises est de 10 €. La recette s'élève à 420 € et il y a eu 54 personnes qui sont venues vous voir. Les membres de ton groupe voudraient savoir combien de personnes étaient assises sur une chaise. Donne-leur la réponse à cette question.

9 Pendant le temps de midi, Maxence va acheter pour ses amis 4 sandwichs et 6 softs dans la boulangerie voisine de l'école. Il paye 24 euros. Le lendemain, la commande s'est agrandie et on lui demande de ramener 10 sandwichs et 15 softs. Il paye alors 60 euros. Au moment de faire les comptes, il souhaite connaitre le prix d'un sandwich et le prix d'un soft. Aide-le.

10 Lors d'un voyage de fin d'études aux sports d'hiver, une soirée en altitude est organisée. Le premier soir, 8 garçons et 3 filles se rendent à la soirée et payent 150 euros pour y participer. Le lendemain, fort des connaissances qu'ils ont liées la veille, le groupe s'élargit à 9 filles et 20 garçons. Ils doivent payer 390 euros d'entrée.
Quel était le prix d'entrée pour les garçons et pour les filles ?

11 Nathan est assis au bord d'une rivière. De l'autre côté, il y a un arbre qu'il voit sous un angle de 50°. S'il recule de 50 m, il voit l'arbre sous un angle de 15°.
Calcule la hauteur de l'arbre et la largeur de la rivière.

Systèmes d'équations à deux inconnues

Résolutions algébriques

Substitution

Isoler une inconnue dans une équation et la remplacer dans l'autre équation.

Exemple :

$$\begin{cases} y = 3x - 4 \\ 3y - x = 3 \end{cases}$$

Résolution

$$\begin{aligned} 3(3x - 4) - x &= 3 \\ 9x - 12 - x &= 3 \\ 8x &= 15 \\ x &= \frac{15}{8} \end{aligned}$$

$$y = 3 \cdot \frac{15}{8} - 4$$

$$y = \frac{13}{8}$$

$$S = \left\{\left(\frac{15}{8} ; \frac{13}{8}\right)\right\}$$

GAUSS

Multiplier chaque équation par un nombre afin que les coefficients en *x* ou en *y* soient opposés pour élimer les termes en *x* et faire la même chose une seconde fois pour élimer les termes en *y*.

Exemple:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 22 \\ 2x + 3y = 23 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} \cdot (-2) \\ \cdot 3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \cdot (-3) \\ \cdot 2 \end{vmatrix}$$

$$\oplus \begin{cases} -6x - 4y = -44 \\ 6x + 9y = 69 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} / \quad 5y &= 25 \\ y &= 5 \end{aligned}$$

$$\oplus \begin{cases} -9x - 6y = -66 \\ 4x + 6y = 46 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -5x \quad / &= -20 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

S = {(4 ; 5)}

Vérifier

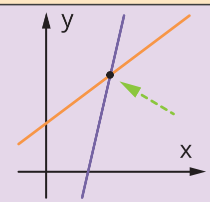
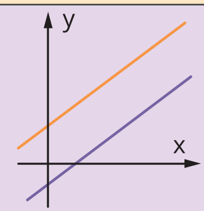
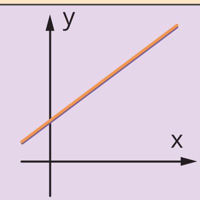
Algébriquement

Remplacer les nombres trouvés dans le système et vérifier l'égalité.

Graphiquement

Tracer les deux droites et vérifier le point d'intersection (c'est aussi une méthode de résolution, mais moins précise).

Nombre de solutions

	Cas général	Ce système est impossible	Ce système est indéterminé
	Une solution	Aucune solution	Une infinité de solutions
Graphique			
Caractéristiques graphiques	Les droites sont sécantes	Les droites sont parallèles	Les droites sont confondues (ou égales)
Nombre de points d'intersection entre les droites	Un seul	Aucun point	Une infinité
Caractéristiques algébriques	Les coefficients des variables *x* et *y* ne sont pas proportionnels	Les coefficients des variables *x* et *y* sont proportionnels mais pas les termes indépendants	Les coefficients des variables *x* et *y* et les termes indépendants sont proportionnels
Solution	S = {(*x* ; *y*)}	S = Ø ou S = { }	S = ℝ

Je me teste !

1 Les couples suivants sont-ils solution de ce système ? **JUSTIFIE**.

a) (0 ; 2) b) (1 ; 0)

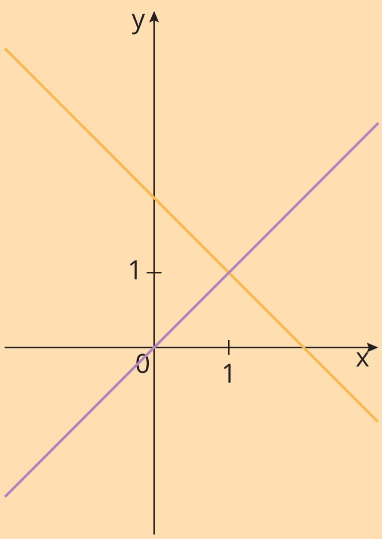
$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 5x - 3y = 5 \end{cases}$$

2 **ASSOCIE** les solutions à leur système d'équations et les systèmes d'équations à leur graphique.

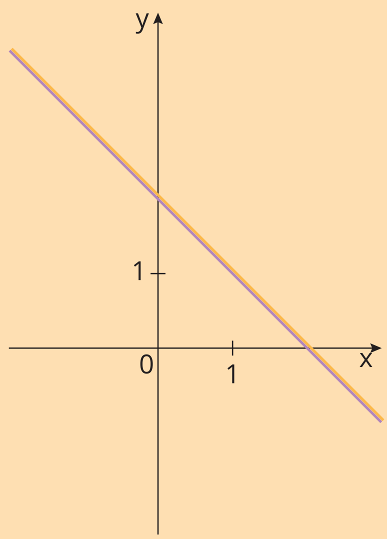
a) Une infinité de solutions b) Pas d'intersection c) Une solution unique

1) $\begin{cases} x + y = 2 \\ -x + y = 0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 0 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases}$

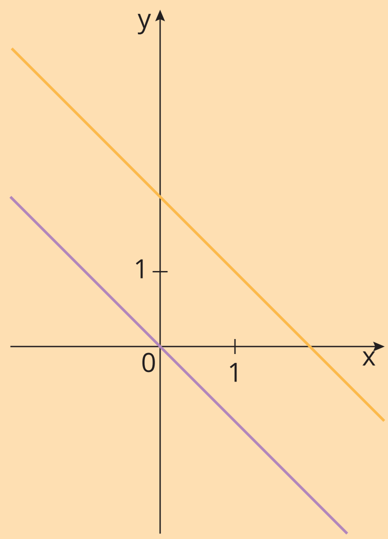
I)



II)



III)



3 Noah adore les animaux, il y en a beaucoup chez lui. Le nombre de chats augmenté de 5 est le double du nombre de chiens. Le nombre de chiens augmenté de 8 vaut quatre fois le nombre de chats. **DÉTERMINE** le nombre de chiens et de chats.

4 Avant de résoudre les systèmes suivants, **DÉTERMINE** le nombre de solutions et **JUSTIFIE** ta réponse. Ensuite, **RÉSOUS** les deux systèmes et **VÉRIFIE**.

a) $\begin{cases} 3x + 5y = 2 \\ 2x + 8y = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + 5y = 3 \\ 6x + 10y = 4 \end{cases}$

Exercices supplémentaires

SOLUTIONS

C1

1 Marco trouve qu'il est bête de voir plusieurs méthodes pour résoudre les systèmes d'équations. Il s'est arrêté à la méthode de substitution et résout tout avec celle-ci. Convaincs-le de l'intérêt de l'autre méthode vue.

2 Combien y a-t-il de solutions ? Justifie.

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 10 \\ 6x + 4y = 20 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3r + 2s = 2 \\ 3r + 2s = 9 \end{cases}$

C2

3 Résous en utilisant la méthode de substitution.

a) $\begin{cases} y = 2x + 1 \\ 3x + 2y = 9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 2 - 2y \\ 4x - 3y = -14 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4a + 3b = 61 \\ 2a - b = 13 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 4x + y = 1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} r - 5s + 7 = 0 \\ 5r + 7s - 13 = -0 \end{cases}$

4 Résous en utilisant la méthode de combinaison linéaire.

a) $\begin{cases} 3x - 2y = 9 \\ -3x + 8y = -3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 4y = 7 \\ 5x - 10y = 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -2a + 4b = -3 \\ 3a - 4b = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 36v + 7w = 165 \\ 9v + w = 39 \end{cases}$ e) $\begin{cases} -x + 7y = 14 \\ 2x - 14y = -28 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 3x + 4y = 8 \\ 2x + 3y = 9 \end{cases}$

5 Résous les systèmes suivants.

a) $\begin{cases} x = 9 - 2y \\ x = 8y - 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = 2 - x \\ y = 2x + 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y - 5 = 0 \\ x - y - 7 = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} a - b - 9 = 0 \\ 2a + b - 15 = 0 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2x + y - 4 = 0 \\ x + y = 3 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 20x - 20y - 23 = 0 \\ 15x - 10y - 18 = 0 \end{cases}$

6 Le couple (4 ; 0) est-il la solution de ces systèmes d'équations ?

a) $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 12x - 2y = 24 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x = 5 + 3x \\ 0 = -3x \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = 1 + x - 5 \\ x + 3 = 0 \end{cases}$

C3

7 Le périmètre d'un rectangle est de 75 cm, la différence entre la longueur est la largeur vaut 13 cm. Quelles sont les dimensions de ce rectangle ?

8 Les parents de la petite Isaline viennent de recevoir la facture de la crèche. On peut y lire que le prix total pour une demi-journée et un gouter est de 15 euros. Au total, Isaline a passé sur le mois 8 demi-journées à la crèche et y a mangé 4 gouters pour un montant de 100 euros.
Que vaut une demi-journée à la crèche ? Et un gouter ?

9 Pour les 50 ans de Suzanne, toute la famille et les amis ont décidé de lui offrir des soins pour le visage et des manucures dans un institut de beauté. Ainsi, chaque soin du visage coute 50 euros et une manucure 20 euros. Le budget récolté est de 580€. Tous souhaitent que Suzanne se rende 20 fois à l'institut. Lors de son passage en institut de beauté, Suzanne ne bénéficiera que d'un soin ou d'une manucure.
Combien de soins du visage et de manucures Suzanne va-t-elle recevoir ?

10 La différence entre les deux angles aigus d'un triangle rectangle est de 14°. Que valent leurs amplitudes ?

11 Julien a bien profité du weekend festif de son village organisé à la fin mai. Il a néanmoins oublié que sa session d'examen était proche… trop proche… Son cours de maths est composé de deux parties : algèbre et trigonométrie. Ces deux parties sont pondérées de manière identique.
À quelques jours du début de cette session, il pose le constat suivant : il lui reste 20 heures d'étude possible avant l'examen de maths ; il estime que chaque heure qu'il consacre au cours d' algèbre lui fera gagner 1 point lors de l'examen ; une heure d'étude de son cours de trigonométrie lui rapportera 0,5 point.
Il a parié avec son cousin qu'il obtiendrait une note de 12/20.
Combien d'heures doit-il étudier le cours d'algèbre et le cours de trigonométrie pour gagner son pari ?
A-t-il bien fait de profiter du weekend festif de son village ?

12 Voici plusieurs systèmes d'équations à trois inconnues.
Résous-les.

a) $\begin{cases} 5x + 3y + 8z = 59 \\ x + 2y - 4z = -12 \\ 3x - 5y + z = -4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 2y + z = 5 \\ 2x + 2y + 2z = 5 \\ 3x + 5y + 2z = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 5y + z = 5 \\ 2x + 5y + 2z = 2 \\ 3x + 5y + 3z = 4 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ 2x + 5y + 1z = 3 \\ 3x + 1y + 1z = 4 \end{cases}$

Challenges mathématiques

Exercice 1

Sans réponse préformulée –
Pablo lit un livre, dont les pages sont numérotées à partir de 1. À un moment où il est en bas d'une page, en additionnant les numéros des pages qu'il a déjà lues, il obtient 351. En additionnant les numéros des pages qu'il lui reste à lire, il obtient 469.
Combien ce livre a-t-il de pages ?

OMB, 2017

Exercice 2

Sans réponse préformulée –
Je fais du vélo avec Marie. Nous roulons tous deux à vitesse constante. Pour effectuer le parcours entier, il me faut 15 minutes tandis qu'il en faut 20 à Marie. Si je lui laisse 4 minutes d'avance, combien de minutes lui faudra-t-il encore après que je l'ai dépassée ?

OMB, 2016

Exercice 3

Sans réponse préformulée –
Un menuisier doit fabriquer 36 armoires. Il s'est planifié un travail uniformément réparti sur plusieurs jours. Mais chaque jour, il confectionne 3 armoires de plus que prévu, ce qui lui permet d'achever la commande avec exactement deux jours d'avance.
Combien d'armoires monte-t-il effectivement par jour ?

OMB, 2015

Exercice 4

Sans réponse préformulée –
La somme de deux nombres naturels est 222.
Quel est le plus grand de ces nombres s'il dépasse de 2 unités le triple du petit ?

OMB, 2013

Exercice 5

Sans réponse préformulée –
Un pêcheur ramena un jour au bout de sa ligne un grand poisson. La tête de ce poisson mesurait 9 cm. Le corps (sans queue ni tête) était aussi long que la tête et la queue réunies. La queue avait la même longueur que la tête plus la moitié du corps. Quelle était, en centimètres, la longueur totale de ce poisson ?

OMB, 2013

CROC'MATH 3B

Théorie

Chapitre 9
Les systèmes d'équations

DÉFINITION

Un **système de deux équations** du premier degré à deux inconnues est un ensemble de deux équations dont on recherche la ou les solution(s) commune(s).

Résoudre un tel système revient donc à trouver tous les couples de points vérifiant simultanément les deux équations de ce système.

Un système de deux équations du premier degré à deux inconnues s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

x et y sont les inconnues de ce système.
a, b, c, d, e, f sont des nombres réels.

On dit qu'un couple de nombres $(x_0 ; y_0)$ est solution de ce système si x_0 et y_0 vérifient les 2 équations du système.

Exemple :

$$\begin{cases} 4x + 2y = 5 \\ 2x + 2y = 1 \end{cases}$$

Ce système possède une solution : (2 ; −1,5)

En effet :

$$\begin{cases} 4 . 2 + 2 . (-1,5) = 5 \\ 2 . 2 + 2 . (-1,5) = 1 \end{cases}$$

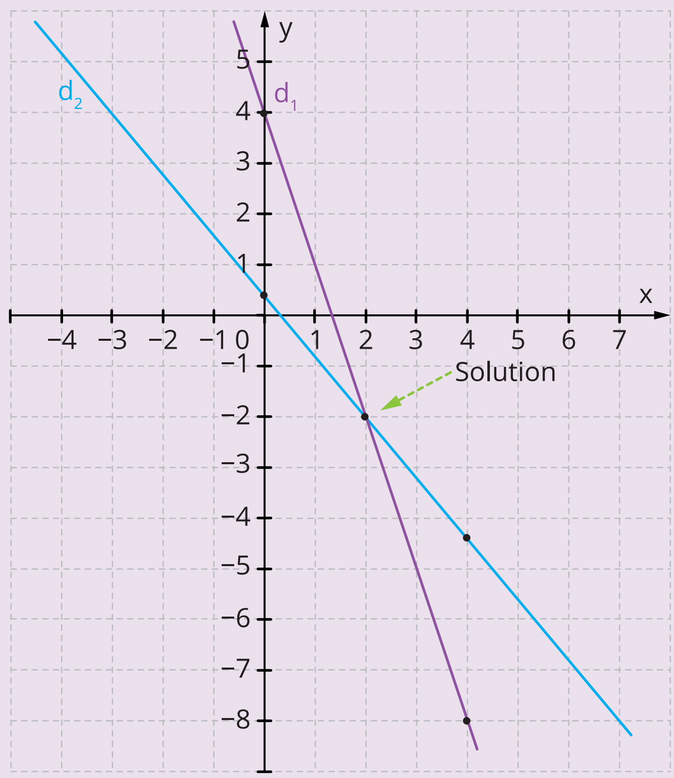
On écrira S = {(2 ; −1,5)}

Graphiquement, résoudre un système d'équations, c'est trouver les coordonnées du ou des point(s) d'intersection entre les deux droites déterminées par les 2 équations du système.

Pour résoudre graphiquement un système de deux équations à deux inconnues :

Il faut :

- tracer les deux droites qui représentent les équations ;
- déterminer les coordonnées du point d'intersection de ces deux droites.

$\begin{cases} 3x + y = 4 \\ 6x + 5y = 2 \end{cases}$ $d_1 \equiv 3x + y = 4$ $d_2 \equiv 6x + 5y = 2$	Ce système est composé de deux droites. Cherchons deux points pour chacune des droites. Pour d_1 : (0 ; 4) et (4 ; –8) Pour d_2 : $\left(0 ; \frac{2}{5}\right)$ et $\left(4 ; \frac{-22}{5}\right)$
Et traçons le graphique.	
Les deux droites se coupent en un point. Ce point est la solution du système. La solution de ce système est donc S = {(2 ; −2)}.	

REMARQUE :

Il est important de toujours faire le lien entre la résolution graphique et la résolution algébrique.

Les résolutions trouvées doivent évidemment correspondre !

La résolution graphique est un moyen de vérification efficace, mais il n'apporte pas la précision de la résolution algébrique.

1. La méthode de substitution

Pour résoudre algébriquement un système de deux équations à deux inconnues :

Il faut se ramener à une équation à une inconnue.
Deux méthodes différentes seront vues cette année (il en existe plusieurs) :

Attention, il y a toujours deux étapes indispensables :
1) simplifier l'écriture :
   $2x + 2 = 4$ devient $x + 1 = 2$
2) aligner les termes en x, les termes en y et les termes indépendants.

$\begin{cases} 3x + y = 4 \\ 6x + 5y = 2 \end{cases}$	On isole une des inconnues dans une des deux équations.
$\begin{cases} y = 4 - 3x \\ 6x + 5y = 2 \end{cases}$	Dans l'autre équation, on remplace cette inconnue par l'expression trouvée.
$\begin{cases} y = 4 - 3x \\ 6x + 5(4 - 3x) = 2 \end{cases}$	On résout l'équation à une inconnue ainsi obtenue.
$\begin{cases} y = 4 - 3x \\ 6x + 20 - 15x = 2 \end{cases}$	
$\begin{cases} y = 4 - 3x \\ -9x = -18 \end{cases}$	
$\begin{cases} y = 4 - 3x \\ x = 2 \end{cases}$	
$\begin{cases} y = 4 - 3 \,.\, 2 \\ x = 2 \end{cases}$	Dans la première équation, on remplace la deuxième inconnue par la solution trouvée.
$\begin{cases} y = -2 \\ x = 2 \end{cases}$	On résout cette équation. On trouve le couple solution de l'équation.
$S = \{(2\ ;\ -2)\}$	La solution est, dans l'ordre, le couple (x ; y).
Vérification On remplace x par 2 et y par −2. $\begin{cases} 3 \,.\, 2 + (-2) \overset{?}{=} 4 \\ 6 \,.\, 2 + 5 \,.\, (-2) \overset{?}{=} 2 \end{cases}$ $\begin{cases} 4 \overset{?}{=} 4 \\ 2 \overset{?}{=} 2 \end{cases}$	On vérifie la solution en remplaçant les nombres trouvés dans le système de départ.

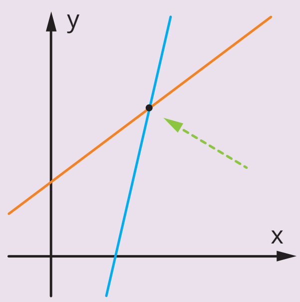
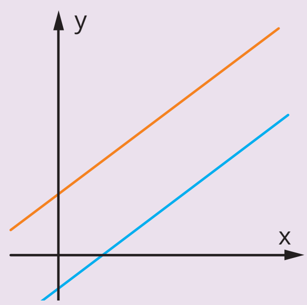
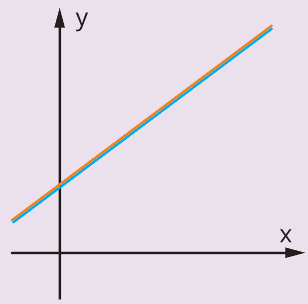
2. La méthode de Gauss ou combinaison linéaire

$\begin{cases}3x = 4 - y\\ 6x + 5y - 2 = 0\end{cases}$	On écrit les deux équations sous la forme : $\begin{cases}ax + by = c\\ dx + ey = f\end{cases}$
$\begin{cases}3x + y = 4 & \mid .\,2\\ 6x + 5y = 2 & \mid .\,(-1)\end{cases}$	On multiplie les deux membres de chaque équation par des réels afin que les coefficients d'une inconnue soient opposés dans chacune des équations.
$\begin{array}{rr} & 6x + 2y = 8\\ + & -6x - 5y = -2\\ \hline & 0x - 3y = 6\end{array}$	On additionne, membre à membre, les deux équations ainsi obtenues.
$-3y = 6$ $y = -2$	On résout l'équation obtenue.
$\begin{cases}3x = 4 - y\\ 6x + 5y - 2 = 0\end{cases}$	Dans une des 2 équations du système de départ, on remplace l'inconnue par la solution trouvée.
$3x = 4 - (-2)$ $3x = 6$ $x = 2$	On résout cette équation.
$\begin{cases}y = -2\\ x = 2\end{cases}$ S = {(2 ; −2)}	On trouve le couple solution du système.
Vérification $\begin{cases}3 \,.\, 2 + (-2) = 4\\ 6 \,.\, 2 + 5 \,.\, (-2) = 2\end{cases}$ $\begin{cases}4 = 4\\ 2 = 2\end{cases}$	On vérifie la solution en remplaçant les nombres trouvés dans le système de départ.
Beaucoup plus rapide ! $\begin{cases}3x + y = 4 & \mid .\,2 & \mid .\,(-5)\\ 6x + 5y = 2 & \mid .\,(-1) & \mid .\,1\end{cases}$ $\oplus \begin{cases}6x + 2y = 8\\ -6x - 5y = -2\end{cases}$ $\begin{array}{r}\hline / - 3y = 6\\ y = -2\end{array}$ $\oplus \begin{cases}-15x - 5y = -20\\ 6x + 5y = 2\end{cases}$ $\begin{array}{r}\hline -9x \quad / = -18\\ x = 2\end{array}$ S = {(2 ; −2)}	On peut également appliquer la méthode de Gauss deux fois, en parallèle, et calculer directement.

3. Les différents cas

Graphiquement, résoudre un système de deux équations à deux inconnues, c'est trouver les coordonnées du ou des point(s) d'intersection entre les deux droites que détermine le système.

Les positions relatives de deux droites ont été étudiées au premier degré.
Tu sais que trois cas peuvent se présenter : les droites peuvent être sécantes, parallèles distinctes ou parallèles confondues.
Ce qui se traduira ici par :

	Cas général	**Ce système est impossible**	**Ce système est indéterminé**
	Une solution	Aucune solution	Une infinité de solutions
Graphique			
Caractéristiques graphiques	Les droites sont sécantes	Les droites sont parallèles	Les droites sont confondues (ou égales)
Nombre de points d'intersection entre les droites	Un seul	Aucun point	Une infinité
Caractéristiques algébriques	Les coefficients des variables x et y ne sont pas proportionnels	Les coefficients des variables x et y sont proportionnels mais pas les termes indépendants	Les coefficients des variables x et y et les termes indépendants sont proportionnels
Solution	S = {(x ; y)}	S = Ø ou S = { }	S = ℝ

Pour déterminer le nombre de solutions d'un système :

Écris les équations sous la forme $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$ et examine les coefficients.

$\begin{cases} 3x + y = 4 \\ 6x + 5y = 2 \end{cases}$ $\frac{3}{6} \neq \frac{1}{5} \neq \frac{4}{2}$ Les coefficients de *x* et de *y* ne sont pas proportionnels. Le système possède une solution.	$\begin{cases} 3x + 5y = 4 \\ 6x + 10y = 3 \end{cases}$ $\frac{3}{6} = \frac{5}{10} \neq \frac{4}{3}$ Les coefficients de *x* et ceux de *y* sont proportionnels mais pas les termes indépendants. Le système est impossible.	$\begin{cases} 3x + 5y = 4 \\ 6x + 10y = 8 \end{cases}$ $\frac{3}{6} = \frac{5}{10} = \frac{4}{8}$ Les coefficients des deux équations sont proportion-nels. Le système est indéterminé.

4. Résolutions de problèmes à l'aide d'un système de deux équations à deux inconnues

Pour résoudre un problème :

Tu veilleras à respecter les 5 étapes suivantes :

1. choix de l'inconnue
2. mise en équation
3. résolution du système d'équations
4. vérification de la solution obtenue
5. présentation rédigée de la solution du problème